Раздел 9

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА.

1. Опыт. Пространство элементарных событий. Случайные события. Алгебра событий.
2. Частота событий. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности. Геометрические вероятности. Аксиомы вероятности. Следствия аксиом. Теорема сложения вероятностей.
3. Условная вероятность. Вероятность произведения событий. Независимость событий. Полная группа событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
4. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Предельные теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона. Полиномиальное распределение.
5. Случайные величины. Распределение вероятностей дискретной случайной величины. Ряд распределения. Многоугольник распределения. Функция распределения и ее свойства. Плотность распределения непрерывной случайной величины и ее свойства.
6. Примеры распределений дискретных случайных величин: гипергеометрическое, биномиальное, геометрическое, Пуассона. Примеры распределений непрерывных случайных величин: равномерное, нормальное, показательное.
7. Многомерные случайные величины. Функция распределения и плотность распределения многомерной случайной величины. Условные распределения. Независимость случайных величин. Распределение суммы двух случайных величин.
8. Распределение функций от случайных величин.
9. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Свойства математического ожидания и дисперсии. Начальные и центральные моменты случайной величины. Ковариация двух случайных величин. Коэффициент корреляции двух случайных величин и его свойства.
10. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева. Теорема Бернулли. Теорема Хинчина.
11. Характеристическая функция случайной величины и ее свойства.
12. Предельные теоремы теории вероятностей. Центральная предельная теорема для сумм одинаково распределенных слагаемых. Теорема Ляпунова.

13. Предмет математической статистики. Обработка данных наблюдений. Первичная статистическая совокупность. Статистический ряд. Гистограмма. Статистическая функция распределения. Статистические начальные и центральные моменты.
14. Точечные оценки неизвестных параметров распределений. Состоятельность, несмещенность и эффективность точечных оценок. метод моментов и метод наибольшего правдоподобия для получения точечных оценок.
15. Интервальные оценки неизвестных параметров распределений.
16. Статистическая проверка гипотез о параметрах распределений и о распределениях. Критерий согласия Пирсона.

Литература.

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления./ М.: Наука. 1978, том 2.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах./ М.: Высшая школа.-1986, часть 2.
3. Шахно К.У. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления./ Минск: Вышэйшая школа.-1975.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения./ М.: Наука.-1988.
5. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей./ М.: Наука.-1982.
6. Никонов В.А. Теория вероятностей. Конспект лекций./ Ленинград.: ЛПИ.-1975.
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике./ М.: Высшая школа.-1979.

Теория вероятностей и математическая статистика.

1. Случайные события. Вероятность события.

Литература: [6], гл. 1-3; [7], гл. 1-3, задачи 17, 18, 42, 47, 68, 85. 91, 99, 112, 121.

Вопросы для самопроверки.

1. Сформулируйте аксиомы вероятности и следствия из них.
2. Дайте классическое определение вероятности. В чем состоит различие между вероятностью и относительной частотой?

3. Дайте определение условной вероятности. Какие события называются независимыми? Чему равна вероятность суммы, произведения событий?
4. Выведите формулу полной вероятности.
5. Выведите формулу Байеса.
6. Дайте определение последовательности независимых испытаний, опишите схему Бернулли и выведите формулу Бернулли.
7. Сформулируйте локальную предельную теорему Муавра-Лапласа, докажите теорему Пуассона. Когда применяются эти теоремы?

2. Случайные величины.

Литература: [6], гл. 4-9; [7], гл. 4-7, задачи 167, 177, 194, 211, 239, 240, 253, 255, 263, 268, 298, 316, 332, 341, 348, 376, 379, 401, 403; [4], гл. 8, §9.

Пример. Задана функция распределения случайной величины **X**:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{2}{\pi}\arcsin(2x), & 0<x<0{,}5\\ 1, & x\ge 0{,}5\end{cases}$$

Необходимо найти плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины. Также требуется определить вероятность попадания в отрезок **[0,25; 1]**.

Решение. Плотность вероятности равна производной от функции распределения. Вычисляя производную, находим:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{4}{\pi\sqrt{1-4x^2}}, & 0<x<0{,}5\\ 0, & x\ge 0{,}5.\end{cases}$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины в общем случае равно

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

В поставленной задаче интегрируется кусочно-гладкая функция. Пределы интегрирования сужаются до интервала, в котором плотность вероятности не равна нулю. Кроме этого, в левой окрестности точки 0,5, плотность вероятности $f(x)\to\infty$, поэтому интеграл вычисляется как несобственный второго рода. Находим:

$$M[X]=\int\limits_0^{0,5}\frac{4x}{\pi\sqrt{1-4x^2}}dx=-\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{0,5-\varepsilon}(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-4x^2)=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}(1-4x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{0,5-\varepsilon}=-\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\left(1-4(0,5-\varepsilon)^2\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]=\frac{1}{\pi}.$$

Согласно определению, дисперсия случайной величины X равна $D[X]=M[(X-M[X])^2]$.

На практике для вычисления дисперсии используют ее свойство, по которому $D[X]=M[X^2]-M^2[X]$.

Математическое ожидание квадрата случайной величины **X** также является несобственным интегралом второго рода:

$$M[X^2]=\int\limits_0^{0,5}\frac{4x^2}{\pi\sqrt{1-4x^2}}dx\left|\begin{array}{ll}\multicolumn{2}{c}{\text{Интегрируем по частям}}\\ u=x & du=dx\\ dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}} & v=-\dfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\left[-x\sqrt{1-4x^2}\Big|_0^{0,5-\varepsilon}+\int\limits_0^{0,5-\varepsilon}\sqrt{1-4x^2}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1-4x^2}dx\left|\begin{array}{l}\text{Производим замену}\\ 2x=\cos t,\quad dx=-\dfrac{1}{2}\sin t dt,\ \ t=\arccos 2x,\quad \sqrt{1-4x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sin t\\ \text{Пересчитываем пределы интегрирования}\\ t_{н}=\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}\qquad t_{в}=\arccos 1=0\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\,dt=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=\frac{t}{4\pi}-\frac{\sin 2t}{8\pi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}.$$

Вычислим дисперсию случайной величины **X**, используя представленную ранее формулу:

$$D[X]=M[X^2]-M^2[X]=\frac{1}{8}-\frac{1}{\pi^2}=0,0237.$$

Для произвольной случайной величины **X** справедливо, что вероятность $P(a\le X<b)=F(b)-F(a)$.

Для непрерывной случайной величины неравенство может быть строгим или нестрогим с обеих сторон. В нашем случае вероятность

$$P(0,25\le X\le 1)=F(1)-F(0,25)=1-\frac{2}{\pi}\arcsin 2\cdot 0,25=1-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}.$$

Вопросы для самопроверки.

1. Дайте определение случайной величины. Приведите примеры.
2. Дайте определение функции распределения случайной величины и докажите ее свойства.
3. Дайте определение плотности распределения и докажите ее свойства.
4. Приведите примеры случайных величин, которые подчиняются распределениям: гипергеометрическому, биномиальному, геометрическому и распределению Пуассона.
5. Приведите примеры случайных величин, которые подчиняются распределениям: равномерному, нормальному и показательному.
6. Как найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал, если она задана своей функцией распределения, плотностью распределения?
7. Как найти распределение функции от дискретной и непрерывной случайной величины?
8. Как найти вероятность попадания пары случайных величин в заданный прямоугольник?
9. Какие две случайные величины называются независимыми? Что представляет собой распределение суммы двух независимых случайных величин?
10. Дайте определение математического ожидания случайной величины и докажите его свойства.
11. Дайте определение дисперсии случайной величины и докажите ее свойства. Что называется среднеквадратичным отклонением случайной величины?
12. Что называется ковариацей двух случайных величин? Что называется коэффициентом корреляции? Докажите его свойства.
13. Докажите неравенство и теорему Чебышева.
14. Что называется характеристической функцией случайной величины? Докажите свойства характеристической функции.
15. Сформулируйте центральную предельную теорему и теорему Ляпунова.

3. Математическая статистика.

Литература: [4], гл. 11; [5], гл. 9, §4.4, §5, задачи 1, 2, 10; [7], гл. 9, 10, 13, задачи 447, 458, 472, 479, 490, 502, 507.

Пример. В таблице представлены наблюдения вектора случайных величин (X, У).
1) Получите оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины X.
2) Определите выборочный коэффициент корреляции между X и У.
3) Найдите выборочную линейную регрессию У на X.
4) По критерию Пирсона с уровнем значимости 0,05 проверьте гипотезу о нормальном распределении случайной величины X и биномиальном распределении случайной величины У (число опытов определяется наибольшим значением У).
5) Укажите 90% доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии случайной величины X.

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
X	6	5	7	6	6	6	3	6	6	5	6	8	6	7	6	6	5	6	8	5
Y	3	2	3	2	3	1	2	3	3	3	2	4	3	4	3	1	2	4	3	2
N	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
X	6	7	7	4	8	7	5	5	7	7	3	8	5	5	6	4	7	6	5	4
Y	3	3	3	1	4	4	3	1	4	4	1	3	2	0	3	2	4	3	4	2

Решение. Составим таблицу частот случайной величины X.. Для этого определим диапазон ее значений. Наименьшее значение X равно 3, наибольшее значение X равно 8. Подсчитаем количество наблюдений X равных 3, получим $n_1=2$. Аналогично заполним остальные столбцы таблицы.

x_i	3	4	5	6	7	8
n_i	2	3	9	14	8	4

1) Оценка математического ожидания случайной величины X равна среднему арифметическому ее наблюдений:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i ,$$

где N – число наблюдений. С помощью таблицы частот можно ускорить вычисления и оценить математическое ожидание X по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i = \frac{1}{40}(3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \ldots + 8 \cdot 4) = 5{,}875 ,$$

где n – число столбцов в таблице частот. Выборочную дисперсию случайной величины X также вычислим с помощью таблицы:

$$S_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i - \bar{x}^2 = 36{,}075 - 5{,}875^2 = 1{,}559.$$

Несмещенная оценка дисперсии больше ее выборочного значения и равна

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{N}{N-1} S_x^2 = 1{,}599.$$

2) Выборочный коэффициент корреляции между X и Y равен

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{S_x S_y},$$

где K_{xy} – выборочная ковариация между X и Y; S_x, S_y – выборочные среднеквадратичные отклонения X и Y. Выборочной ковариацией между X и Y называется величина

$$K_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{x})(Y_i - \bar{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - \bar{x}\cdot\bar{y}.$$

x_i \ y_j	0	1	2	3	4	n_i
3	0	1	1	0	0	2
4	0	1	2	0	0	3
5	1	1	4	2	1	9
6	0	2	2	9	1	14
7	0	0	0	3	5	8
8	0	0	0	2	2	4
m_j	1	5	9	16	9	40

На практике для вычисления ковариации удобно использовать таблицу частот вектора (X,Y). Чтобы заполнить ячейки таблицы подсчитаем количество наблюдений вектора (3,0). Их оказалось 0, то есть ни одного. Затем подсчитаем количество наблюдений вектора (3,1). Таких значений 1. Записываем 0, 1 и далее в первой строке таблицы. Так продолжаем до вектора (8,4), всего 2 значения. Таблица заполнена.

В таблице добавлен столбец частот случайной величины X (n_i), и строка частот случайной величины Y (m_j). Строка частот Y используется для вычисления

$$\bar{y} = 2{,}675; \quad S_y^2 = 1{,}069.$$

Выборочная ковариация величин X и Y равна

$$K_{xy}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j n_{ij}-\bar{x}\cdot\bar{y}=\frac{1}{40}(3\cdot1\cdot1+3\cdot2\cdot1+...+8\cdot4\cdot2)-5{,}875\cdot2{,}675=$$

$$=16{,}525-15{,}716=0{,}809.$$

где $\bar{y}$ среднее арифметическое случайной величины Y. Выборочный коэффициент корреляции между X и Y равен

$$r_{xy}=\frac{0{,}809}{\sqrt{1{,}559\cdot1{,}069}}=0{,}627.$$

3) Выборочную линейную регрессию случайной величины Y на X ищем в виде y=a+b·x.

Коэффициенты регрессии равны:

$$b=\frac{K_{xy}}{S_x^2}=\frac{0{,}809}{1{,}559}=0{,}519;$$

$$a=\bar{y}-b\bar{x}=2{,}675-0{,}519\cdot5{,}875=-0{,}374.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в уравнение регрессии, получим уравнение регрессии

y= - 0,374+0,519·x.

4) Дополним таблицу частот случайной величины X значениями частости $p_i^*=\frac{n_i}{N}$.

x_i	3	4	5	6	7	8
n_i	2	3	9	14	8	4
p_i^*	0,05	0,075	0,225	0,35	0,2	0,1
p_i	0,024	0,105	0,248	0,314	0,212	0,077

В третьей строке таблицы получено выборочное распределение случайной величины X, статистический аналог распределения вероятностей. Заполним строку теоретического распределения X. Согласно гипотезе, случайная величина X подчиняется нормальному распределению, то есть ее плотность вероятности имеет вид

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Точные значения параметров a и σ_X неизвестны, заменим их выборочными оценками $\bar{x}=5{,}875$ и $\hat{\sigma}_X=\sqrt{1{,}599}=1{,}265$. Рассчитаем приблизительно вероятности:

$$p_1=\frac{1}{\sqrt{2\cdot3{,}14\cdot1{,}599}}e^{-\frac{(3-5{,}875)^2}{2\cdot1{,}599}}=0{,}024$$

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}599}} e^{-\frac{(4-5{,}875)^2}{2 \cdot 1{,}599}} = 0{,}105$$

....

$$p_6 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}599}} e^{-\frac{(8-5{,}875)^2}{2 \cdot 1{,}599}} = 0{,}077$$

и заполним четвертую строку таблицы. Для проверки гипотезы о нормальном распределении X необходимо рассчитать случайную величину

$$\chi^2 = N\sum_{i=1}^{n} \frac{(p_i - p_i^*)^2}{p_i} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i^2}{p_i} - N = 2{,}03,$$

где n=6 – число столбцов таблицы. Гипотеза о нормальном распределении принимается, если найденное значение окажется меньше $\chi^2_{кр}$, которое определяется по таблице критических точек распределения χ^2 (см. Приложение 2). Число степеней свободы χ^2 равно

k=n-1-r=6-1-2=3,

где r=2, поскольку два параметра распределения - a и σ_x заменили их оценками $\bar{x}$ и $\hat{\sigma}_x$ Уровень значимости, по условию задачи равен 0,05.

По таблице критических точек находим значение $\chi^2_{кр}$=7,81. Поскольку 2,03<7,81, то принимается гипотеза о нормальном распределении случайной величины X.

Составим таблицу частот, частости и теоретической вероятности случайной величины Y.

y_j	0	1	2	3	4
m_j	1	5	9	16	9
q_j^*	0,025	0,125	0,225	0,4	0,225
q_j	0,012	0,097	0,294	0,396	0,200

В соответствии с гипотезой о биномиальном распределении случайной величины Y, значения теоретической вероятности определяются по формуле

$$q_j = C_n^{y_j} \hat{p}^{y_j} (1-\hat{p})^{n-y_j},$$

где $\hat{p} = \bar{y}/n = 2{,}675/4 = 0{,}669$ - оценка вероятности успеха; n – число опытов (по условию, равно наибольшему значению y, то есть 4). Для проверки гипотезы определим χ^2=1,66, число степеней свободы k=5-1-1=3, $\chi^2_{кр}$=7,81. Здесь r=1, так как один параметр распределения заменили его оценкой $\hat{p}$. Поскольку 1,66<7,81, то гипотеза о биномиальном распределении случайной величины Y принимается.

5) Доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X имеет вид:

$$\bar{x} - \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \cdot t_\alpha < M[X] < \bar{x} + \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \cdot t_\alpha,$$

где t_α - критическая точка распределения Стьюдента (см. Приложение 3). Доверительная вероятность равна 0,9, уровень значимости равен 1-0,9=0,1. Число степеней свободы N-1=39. По таблице критических точек распределения Стьюдента находим t_α=1,685. В результате получим доверительный интервал:

$$5{,}875 - \sqrt{\frac{1{,}599}{40}} \cdot 1{,}685 < M[X] < 5{,}875 + \sqrt{\frac{1{,}599}{40}} \cdot 1{,}685$$

$$5{,}675 < M[X] < 6{,}075.$$

Доверительный интервал для дисперсии случайной величины X имеет вид

$$\frac{N \cdot S_x^2}{\chi_в^2} < D[X] < \frac{N \cdot S_x^2}{\chi_н^2},$$

где $\chi_н^2$ и $\chi_в^2$ соответственно нижняя и верхняя критические точки распределения χ^2.При заданной доверительной вероятности 0,9, определяем вероятность 1-0,9=0,1. Делим ее пополам 0,1/2=0,05. По уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы 39 находим $\chi_в^2$=54,57. Затем находим уровень значимости для нижнего критического значения 1-0,05=0,95. После этого определяем $\chi_н^2$=25,70. Подставляем найденные значения в формулу для доверительного интервала. Получим

$$\frac{40 \cdot 1{,}559}{54{,}57} < D[X] < \frac{40 \cdot 1{,}559}{25{,}70}$$

$$1{,}143 < D[X] < 2{,}426.$$

Вопросы для самопроверки.

1. Как производится группировка случайной величины? Что называется гистограммой? Как с помощью гистограммы построить статистическую функцию распределения?
2. Какие вы знаете точечные оценки неизвестных параметров распределений? Дайте определение несмещенной, состоятельной и эффективной оценки.
3. Оцените параметры нормального и биномиального распределений методом наибольшего правдоподобия.

4. Как найти доверительный интервал для математического ожидания случайной величины, если число наблюдений случайной величины считается большим?
5. Как проверить гипотезу о теоретическом распределении случайной величины? Как находится число степеней свободы распределения χ^2?

После изучения данного материала выполните контрольную работу.

Контрольная работа.

1.1. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает: а) все три вопроса; б) только два вопроса; в) только один вопрос экзаменационного билета.

1.2. В каждой из двух урн находятся 5 белых и 10 черных шаров. Из первой урны во вторую переложили наудачу один шар, а затем из второй урны вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется черным.

1.3. Три стрелка в одинаковых и независимых условиях произвели по одному выстрелу по одной и той же цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8, третьим – 0,7. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков попал в цель; б) только два стрелка попали в цель; в) все три стрелка попали вцель.

1.4. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 1600 испытаниях событие наступит 1200 раз.

1.5. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,9, второе – 0,95, третье – 0,85. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только одно устройство; б) только два устройства; в) все три устройства.

1.6. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,02. Найти вероятность того, что в 150 испытаниях событие наступит 5 раз.

1.7. В партии из 1000 изделий имеются 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди 50 изделий, взятых наудачу из этих партии, ровно три окажутся дефектными.

1.8. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 125 испытаниях событие наступит не менее 75 и не более 90 раз.

1.9. На трех станках при одинаковых и независимых условиях изготовляются детали одного наименования. На первом станке изготовляют 10%, на втором – 30%, на третьем – 60% всех деталей. Вероятность каждой детали быть дефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке, 0,8 – если на втором станке, и 0,9 – если на третьем станке. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бездефектной.

1.10. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые по жребию распределяются по 10 человек. Найти вероятность того, что: а) двое наиболее сильных игроков будут играть в разных группах; б) четверо наиболее сильных игроков попадут по 2 в две разные группы.

1.11. У сборщика 12 деталей мало отличающихся друг от друга. Из них 5 одного вида, 4 – второго, 3 – третьего. Какова вероятность, что среди 6-ти одновременно взятых деталей 3 окажутся одного вида, 2 – второго, 1 – третьего?

1.12. На 10 карточках написаны буквы: А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И, К. После перестановки вынимают наугад одну карточку за другой и расставляют в том порядке, в каком они были выдвинуты. Найти вероятность того, что на карточках будет написано слово «математика».

1.13. На 8 карточках написаны буквы И, Н, Т, Е, Г, Р, А, Л. После перестановки вынимают наугад по карточке. Каждая из букв на вынутой карточке записывается в том порядке, в каком она вынимается. Найти вероятность того, что будет записано слово «интеграл»: а) в случае если карточки не возвращались; б) в случае, если вынутая карточка возвращалась.

1.14. Вероятность, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

1.15. Имеется 10 урн, из которых в девяти находятся по 2 черных и по 2 белых шара, а в одной – 5 белых и 1 черный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность, что шар извлечен из урны, содержащей 5 белых шаров.

1.16. Наудачу взяты два положительных числа Х и У, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность, что произведение ХУ не больше единицы, а частное У/Х не больше двух.

1.17. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 1/4 часа, после чего уходит. Найти вероятность, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода в промежутке от 12 до 13 часов.

1.18. Вероятность, что изготовленная деталь отличного качества, равна 0,9. Изготовлено 50 деталей. Чему равно: а) наивероятнейшее число изделий отличного качества; б) вероятность такого числа изделий отличного качества.
1.19. Вероятность, что лампа останется исправной после 1000 часов работы, равна 0,2. Какова вероятность, что хотя бы одна из трех ламп останется исправной после 1000 часов работы.
1.20. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени Т равна 0,002. Найти вероятность, что за время Т откажут ровно три элемента.
1.21. Студент идет сдавать экзамен, зная 20 вопросов из 30. Ему предлагают 3 вопроса. Какова вероятность, что он ответит хотя бы на два вопроса?
1.22. Вероятность купить выигрышный лотерейный билет равна 0,02. Какова вероятность, что 100 приобретенных билетов принесут три выигрыша? Какова вероятность, что из тысячи купленных билетов выиграют не меньше 15 и не больше 40?
1.23. Проект в случае благоприятных внешних условий, будет завершен успешно с вероятностью 0,75. Если условия не благоприятны, то вероятность успешного завершения проекта равна 0,3. Благоприятные внешние условия наступают в 70% случаев. Какова вероятность успешного завершения проекта? Если проект провалился, то какова вероятность, что условия для его выполнения были благоприятными.
1.24. Наудачу выбрали два положительных числа из отрезка [0;4]. Какова вероятность, что модуль разности этих двух чисел не больше двух.

2. Случайная величина **X**, число успехов в последовательности независимых испытаний, подчиняется биномиальному распределению. Вероятность успеха равна **p**, число испытаний **n**. Определите ряд распределения данной случайной величины, постройте распределение вероятностей и функцию распределения. Найдите математическое ожидание и дисперсию, исходя из определения этих числовых характеристик. Сравните найденные значения с теоретическими.

2.1. p=0,4, n=3	2.7. p=0,6, n=3	2.13. p=0,9, n=3	2.19. p=0,8, n=3
2.2. p=0,4, n=4	2.8. p=0,6, n=4	2.14. p=0,1, n=4	2.20. p=0,3, n=4
2.3. p=0,3, n=5	2.9. p=0,7, n=5	2.15. p=0,6, n=5	2.21. p=0,2, n=6
2.4. p=0,2, n=3	2.10. p=0,3, n=3	2.16. p=0,1, n=3	2.22. p=0,3, n=7
2.5. p=0,2, n=4	2.11. p=0,9, n=4	2.17. p=0,8, n=4	2.23. p=0,4, n=4
2.6. p=0,4, n=5	2.12. p=0,8, n=5	2.18. p=0,9, n=5	2.24. p=0,5, n=5

3. Случайная величина **X** задана своей функцией распределения **F(x)**. Найдите плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины. Определите вероятность попадания в отрезок **[a; b]**.

3.1. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

$a=-1,\ \ b=0{,}5.$

3.2. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \left(x^2-x\right)/2, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

$a=1{,}5,\ \ b=3.$

3.3. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

$a=-2,\ \ b=0>=0{,}5.$

3.4. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 3x^2+2x, & 0<x\le 1/3\\ 1, & x>1/3\end{cases}$$

$a=0{,}25,\ \ b=2.$

3.5. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ x/2-1, & 2<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$$

$a=0,\ \ b=3.$

3.6. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2/9, & 0<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

$a=0,\ \ b=2.$

3.7. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2/4, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

$a=1,\ \ b=3.$

3.8. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\pi/2\\ \cos x, & -\pi/2<x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

$a=-\dfrac{\pi}{4},\ \ b=\pi.$

3.9. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2\sin x, & 0<x\le \pi/6\\ 1, & x>\pi/6\end{cases}$$

$a=-\pi,\ \ b=\pi/8.$

3.10. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\pi/4\\ \cos 2x, & 3\pi/4<x\le \pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$$

$a=0,\ \ b=5\pi/6.$

3.11. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{4}{3}\left(1-e^{-2x}\right), & 0<x\le \ln 2\\ 1, & x>\ln 2\end{cases}$$

$a=-1,\ \ b=\ln(1{,}5).$

3.12. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{3}{2}\left(1-e^{-x}\right), & 0<x\le \ln 3\\ 1, & x>\ln 3\end{cases}$$

$a=\ln 2,\ \ b=\ln 4.$

3.13. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{8}{7}\left(1-e^{-3}\right), & 0<x\le \ln 2\\ 1, & x>\ln 2\end{cases}$$

$a=\ln\left(1{,}5\right),\ \ b=\ln 3.$

3.14. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \dfrac{4}{5}\left(\operatorname{arctg} x+\dfrac{\pi}{4}\right), & -1<x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

$a=-\sqrt{3},\ \ b=-1/\sqrt{3}.$

3.15. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{6}{\pi}\operatorname{arctg}x, & 0<x\le 1/\sqrt{3}\\ 1, & x>1/\sqrt{3}\end{cases}$

$a=-1/\sqrt{3},\ \ b=\sqrt{3}.$

3.16. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{3}{\pi}\operatorname{arctg}x, & 0<x\le \sqrt{3}\\ 1, & x>\sqrt{3}\end{cases}$

$a=-1,\ \ b=1.$

3.17. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1/\sqrt{3}\\ \dfrac{6}{\pi}\left(\operatorname{arctg}x-\dfrac{\pi}{6}\right), & 1/\sqrt{3}<x\le 3\\ 1, & x>\sqrt{3}\end{cases}$

$a=-1,\ \ b=1.$

3.18. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1/\sqrt{3}\\ \dfrac{4}{\pi}\left(\arcsin x+\dfrac{\pi}{4}\right), & -1/\sqrt{2}<x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$

$a=-1,\ \ b=1/2.$

3.19. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{3}{\pi}\arcsin x, & 0<x\le \sqrt{3}/2\\ 1, & x>\sqrt{3}/2\end{cases}$

$a=-1,\ \ b=1/2.$

3.20. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1/\sqrt{2}\\ \dfrac{4}{\pi}\left(\arcsin x-\dfrac{\pi}{4}\right), & 1/\sqrt{2}<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$

$a=-1,\ \ b=\sqrt{3}/2.$

3.21. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{x-2}{2}, & 2<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$

$a=0,\ \ b=2{,}5.$

3.22. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\pi\\ \cos\left(\dfrac{x}{4}\right), & -2\pi<x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$

$a=-\pi,\ \ b=\pi.$

3.23. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ e^{x-1}-1, & 1<x\le 1+\ln 2\\ 1, & x>1+\ln 2\end{cases}$

$a=\ln 2,\ \ b=\ln 4.$

3.24. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{2}\right), & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a=\dfrac{\pi}{3},\ \ b=\pi.$

4. Известны математическое ожидание a и среднее квадратичное отклонение σ нормально распределенной случайной величины X. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$.

4.1. $a=10,\ \sigma=4,\ \alpha=2,\ \beta=13.$

4.2. $a=9,\ \sigma=5,\ \alpha=5,\ \beta=14.$

4.3. $a=8,\ \sigma=1,\ \alpha=4,\ \beta=9.$

4.4. $a=7,\ \sigma=2,\ \alpha=3,\ \beta=10.$

4.5. $a=6,\ \sigma=3,\ \alpha=2,\ \beta=11.$

4.6. $a=5,\ \sigma=1,\ \alpha=1,\ \beta=12.$

4.7. $a=4,\ \sigma=5,\ \alpha=2,\ \beta=11.$

4.8. $a=3,\ \sigma=2,\ \alpha=3,\ \beta=10.$

4.9. $a=2,\ \sigma=5,\ \alpha=4,\ \beta=9.$

4.10. $a=2,\ \sigma=4,\ \alpha=6,\ \beta=10.$

4.11. $a = 3, \sigma = 2, \alpha = 0, \beta = 4.$

4.12. $a = 4, \sigma = 4, \alpha = -4, \beta = 10.$

4.13. $a = 5, \sigma = 10, \alpha = 3, \beta = 20.$

4.14. $a = 4, \sigma = 1, \alpha = 4, \beta = 6.$

4.15. $a = 3, \sigma = 3, \alpha = -1, \beta = 7.$

4.16. $a = 5, \sigma = 5, \alpha = 3, \beta = 11.$

4.17. $a = 7, \sigma = 2, \alpha = 3, \beta = 9.$

4.18. $a = 6, \sigma = 6, \alpha = -6, \beta = 16.$

4.19. $a = 2, \sigma = 4, \alpha = 0, \beta = 7.$

4.20. $a = 9, \sigma = 3, \alpha = 5, \beta = 13.$

4.21. $a = -4, \sigma = 3, \alpha = -10, \beta = 0.$

4.22. $a = 5, \sigma = 2, \alpha = 1, \beta = 7.$

4.23. $a = -6, \sigma = 4, \alpha = -10, \beta = 2.$

4.24. $a = 2, \sigma = 5, \alpha = -3, \beta = 12.$

5. В таблице представлены наблюдения вектора случайных величин (X, У).
1) Получите оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины X.
2) Определите коэффициент корреляции между X и У.
3) Найдите линейную регрессию У на X.
4) По критерию Пирсона с уровнем значимости 0,05 проверьте гипотезу о нормальном распределении случайной величины X и биномиальном распределении случайной величины У (число опытов определяется наибольшим значением У).
5) Постройте 95% доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии случайной величины X.

Примечание: по согласованию с преподавателем общее число наблюдений может быть уменьшено до 30-40. Тогда номер первого наблюдения совпадает с последней цифрой года выполнения работы. Если последняя цифра года 0, то следует начинать с 10-го наблюдения.

	Варианты по статистике																							
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**		**7**		**8**		**9**		**10**		**11**		**12**	
	X	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**
1	7	2	4	2	7	2	4	2	9	3	2	2	6	3	2	3	6	2	3	3	6	2	3	3
2	9	3	4	2	8	2	4	4	5	1	4	1	6	3	2	3	7	2	6	1	4	2	3	3
3	9	3	4	3	11	5	1	4	6	2	4	1	9	4	3	3	8	3	5	1	8	2	3	3
4	9	3	3	3	11	4	3	3	8	3	3	2	10	3	2	3	6	1	4	2	9	3	3	2
5	9	2	4	1	10	4	4	2	5	1	6	1	8	4	4	2	6	3	5	2	9	3	4	3
6	7	2	3	3	9	5	4	3	6	0	4	2	8	3	4	3	5	2	3	3	8	3	3	2
7	9	3	5	2	9	3	4	1	7	2	4	2	7	2	3	3	8	3	4	1	7	3	5	1
8	9	3	5	2	10	5	6	1	11	4	4	3	12	4	1	3	10	3	4	1	8	3	5	3
9	9	3	4	3	7	3	4	1	10	4	6	1	9	4	3	2	8	3	2	5	10	3	3	3
10	9	3	5	2	8	3	3	3	4	1	3	3	5	2	4	2	7	2	0	4	6	2	5	2
11	7	3	2	3	8	4	6	1	6	2	3	3	8	3	7	1	7	2	4	3	8	3	4	2
12	8	2	2	3	7	4	5	1	6	1	5	2	9	4	2	2	7	3	3	3	7	1	5	2
13	8	2	5	2	5	2	5	3	9	4	2	2	10	3	4	2	7	1	6	1	9	3	4	2
14	9	3	4	2	10	5	3	2	8	3	5	1	8	2	2	3	6	2	4	4	6	2	3	3
15	6	2	5	2	10	4	5	2	8	4	5	0	7	3	3	3	7	2	3	2	8	1	4	1
16	8	3	2	3	9	5	4	2	8	2	5	1	7	3	3	3	6	3	3	3	7	2	3	3

17	6	3	4	3	6	2	2	3	7	1	3	2	8	4	3	3	5	2	7	0	7	3	3	2
18	8	3	3	3	8	3	2	3	7	4	3	2	8	4	5	2	8	2	3	3	8	3	7	2
19	8	3	3	3	9	3	3	1	7	2	4	1	7	2	4	2	9	3	5	1	7	1	3	3
20	7	2	3	2	9	4	3	2	5	1	5	1	7	3	3	3	9	3	3	2	8	2	6	1
21	8	3	2	3	10	4	2	4	9	4	7	0	10	3	3	3	7	2	3	3	6	3	3	2
22	9	3	5	1	12	5	7	2	7	3	7	1	3	1	5	1	7	3	4	1	10	3	4	2
23	5	1	2	3	10	4	4	3	5	3	4	1	6	2	4	3	10	3	5	1	8	3	3	3
24	6	2	4	3	9	3	3	3	4	1	4	1	8	2	4	3	7	2	5	2	8	3	6	2
25	8	3	4	2	7	4	4	2	8	2	6	0	8	2	2	2	6	1	2	3	7	2	3	3
26	7	3	4	2	7	3	3	3	7	3	3	2	7	3	5	2	9	3	2	5	6	2	5	2
27	7	3	2	3	6	3	5	1	11	5	5	2	8	3	2	3	7	2	5	1	8	2	4	2
28	8	3	4	3	10	4	5	1	6	1	5	0	6	3	2	3	8	3	5	2	8	3	3	3
29	8	3	4	2	11	5	4	3	10	4	2	4	9	3	5	1	9	3	3	3	7	3	2	3
30	8	3	4	1	8	2	3	3	8	2	3	2	6	1	2	3	6	2	3	1	6	3	4	2
31	5	2	3	3	9	4	2	2	8	3	6	0	8	2	3	2	8	3	5	1	9	3	4	2
32	9	3	4	1	8	4	4	2	8	3	4	2	7	2	2	3	8	2	4	4	8	3	4	2
33	8	3	3	3	7	4	3	2	8	4	4	2	9	3	5	2	5	1	2	5	6	2	4	3
34	7	3	4	3	8	2	5	1	6	2	5	1	7	2	2	3	7	2	2	3	7	3	5	2
35	6	3	3	2	7	3	2	3	6	3	4	2	8	3	5	1	7	3	5	1	6	3	3	3
36	7	2	4	3	8	4	5	2	8	2	5	0	6	1	3	2	8	3	2	2	7	2	3	3
37	9	3	5	2	10	5	4	2	6	1	9	0	7	4	4	2	6	2	3	3	5	2	3	3
38	9	3	4	3	10	5	3	2	7	2	4	1	7	2	2	3	9	3	2	4	6	3	4	3
39	10	3	4	1	10	4	6	0	8	2	4	2	6	2	5	3	8	2	2	2	8	3	4	2
40	8	3	4	3	8	4	2	2	9	4	5	0	10	4	2	3	6	2	4	2	8	2	2	3
41	6	3	3	3	8	3	2	3	7	3	4	1	9	4	6	1	7	2	1	3	6	2	4	3
42	7	2	4	2	9	3	3	3	7	2	5	1	6	0	2	3	8	3	3	3	8	3	4	3
43	6	3	3	3	7	2	3	3	7	3	2	3	7	1	4	2	8	3	0	5	9	2	3	3
44	8	3	3	3	7	3	5	1	8	3	5	2	8	2	3	2	7	2	3	3	7	2	2	3
45	7	3	3	2	6	3	5	3	6	1	5	1	8	2	5	1	8	3	4	3	8	2	3	3
46	9	2	2	3	9	3	3	2	7	3	6	0	7	2	4	3	7	2	5	2	7	3	2	3
47	6	3	2	3	9	4	4	3	8	4	6	1	10	4	2	2	9	3	3	3	6	2	2	3
48	8	3	1	3	8	3	2	3	8	2	4	1	7	2	4	2	7	2	4	3	7	3	3	3
49	8	3	4	2	11	5	6	2	6	1	6	1	7	2	5	1	7	2	3	3	8	3	3	2
50	7	2	4	2	9	4	6	1	8	2	5	2	8	3	2	3	7	2	4	3	8	3	5	0

N	Варианты по статистике																							
	13		**14**		**15**		**16**		**17**		**18**		**19**		**20**		**21**		**22**		**23**		**24**	
	X	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**
1	8	4	3	3	6	3	5	2	9	4	6	1	9	4	5	2	9	4	2	3	8	3	5	2
2	10	3	3	3	4	1	1	4	5	1	4	2	8	4	5	1	9	2	5	2	5	2	1	5
3	10	4	4	2	7	2	2	3	10	4	3	2	9	3	4	2	9	4	5	2	7	3	3	4
4	6	2	4	3	8	3	3	3	8	3	3	2	9	3	7	0	8	3	2	3	7	2	1	4
5	6	2	3	4	7	1	2	3	5	1	4	3	8	4	5	1	7	3	3	2	8	3	2	4
6	9	4	4	3	5	1	4	3	9	4	6	2	8	2	2	3	7	3	4	1	9	3	2	4
7	9	4	3	3	7	2	6	1	7	3	5	2	9	4	4	2	7	1	2	3	9	4	4	3
8	8	4	3	3	7	3	1	4	9	3	5	3	8	4	5	2	9	4	4	3	7	1	4	2
9	10	4	3	3	6	2	0	3	9	4	6	1	7	3	4	3	6	3	5	3	8	2	5	2
10	8	3	5	1	3	0	1	4	7	1	3	3	8	3	4	3	9	4	6	0	9	2	4	2
11	7	3	3	3	7	3	4	2	7	2	5	1	10	3	3	3	8	3	4	2	8	3	2	3
12	9	3	2	3	5	1	1	5	10	4	3	2	9	3	2	2	8	3	3	3	6	1	2	4
13	10	4	3	3	8	3	2	2	9	4	4	2	9	4	6	1	9	3	3	3	7	2	4	2
14	8	3	3	2	7	1	2	4	8	4	4	1	9	4	5	2	9	4	6	2	9	4	4	3
15	10	4	4	1	7	1	3	3	10	4	3	2	7	2	3	4	7	3	2	3	9	3	1	5
16	10	3	2	4	8	3	1	3	10	4	5	2	10	3	2	4	5	2	5	2	8	3	1	4
17	8	3	3	4	8	4	2	4	9	4	5	3	8	3	4	1	7	3	4	2	8	2	1	4
18	5	2	3	2	7	1	5	2	9	4	4	3	5	2	5	2	7	3	4	2	9	4	2	3
19	7	3	5	1	9	3	5	3	9	4	3	3	8	4	2	4	8	3	5	3	8	3	3	2
20	9	3	4	2	6	2	1	4	8	2	4	2	10	4	2	3	10	4	4	2	10	4	2	3
21	7	2	5	1	8	2	5	3	7	2	3	3	9	4	3	2	9	3	3	2	7	2	4	2
22	4	1	4	3	9	4	2	4	9	4	4	3	9	3	5	1	6	2	4	3	9	2	3	3
23	8	3	2	3	7	2	3	4	8	3	1	3	9	4	4	3	7	3	3	2	8	3	1	4
24	8	3	2	1	7	2	3	2	7	2	5	1	8	4	5	2	8	3	4	2	6	2	3	4
25	6	2	5	2	7	1	6	1	6	2	3	2	9	4	4	1	6	1	4	3	8	3	5	1
26	6	2	4	2	6	2	3	3	11	4	5	1	10	4	5	1	10	4	3	2	6	2	2	3
27	7	2	1	3	9	3	3	4	8	3	4	2	8	3	1	3	7	3	4	2	6	2	2	2
28	9	4	6	1	10	4	4	1	7	0	2	3	8	2	8	0	9	3	5	3	7	2	4	3
29	9	4	3	2	10	3	4	2	6	1	3	2	9	4	5	1	8	3	4	2	10	3	3	4
30	9	3	4	2	8	2	2	5	7	3	3	3	9	4	5	2	9	4	1	3	6	2	4	1
31	6	3	6	1	5	1	2	3	9	4	3	3	8	4	5	2	10	4	4	2	8	2	3	3
32	9	4	5	2	8	2	3	4	10	3	5	2	11	4	2	3	9	4	3	2	9	4	5	2
33	9	4	4	2	10	3	3	2	8	2	6	2	11	3	3	3	8	4	3	3	8	2	2	3
34	7	2	5	3	6	3	2	4	10	4	3	3	8	3	5	2	7	2	4	2	6	2	2	3
35	8	3	4	2	9	3	3	2	9	3	6	2	7	2	8	1	6	2	4	2	8	3	4	2
36	8	2	3	2	6	2	2	3	10	4	3	2	9	4	2	4	7	3	3	3	5	2	3	4
37	6	3	3	2	7	3	2	4	8	3	3	2	6	2	4	1	9	4	3	3	7	3	7	1
38	7	2	5	1	6	1	4	3	8	3	5	3	11	4	6	1	8	2	4	1	6	1	5	3
39	9	4	4	3	8	3	2	3	9	3	4	2	8	4	5	2	9	4	5	2	8	3	5	3
40	7	2	4	1	8	3	4	2	7	3	1	3	7	2	2	4	8	3	4	3	11	4	4	1
41	9	3	4	1	6	2	5	4	8	3	4	1	8	3	4	2	6	2	4	2	8	2	2	2
42	7	3	5	2	7	3	3	3	8	2	3	3	10	3	4	3	8	3	5	2	8	3	2	3
43	10	4	7	1	9	3	5	1	10	3	4	1	7	3	4	3	10	4	1	3	8	3	4	2
44	9	4	6	2	8	3	2	2	8	2	5	2	8	4	3	3	9	4	6	2	8	3	4	2
45	9	4	4	2	9	2	3	4	9	4	3	3	11	4	4	2	9	4	3	3	8	4	1	5
46	10	3	5	1	9	4	4	3	7	3	6	1	7	3	3	3	8	3	3	3	8	4	3	4
47	7	2	1	3	5	1	-2	5	9	3	4	2	8	4	5	1	10	3	5	3	7	1	3	3
48	8	3	2	4	5	1	4	3	8	4	4	3	8	4	2	4	9	4	4	3	8	2	2	5
49	8	4	3	3	8	2	6	1	9	4	4	3	8	3	4	3	9	3	5	1	8	3	0	3
50	8	3	2	3	10	3	3	3	7	2	4	1	7	2	4	3	8	3	4	3	8	3	5	1

Приложение 1

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,00	0,000	0,30	0,118	0,60	0,226	0,90	0,316	1,20	0,385	1,50	0,433	1,80	0,464
0,01	0,004	0,31	0,122	0,61	0,229	0,91	0,319	1,21	0,387	1,51	0,434	1,81	0,465
0,02	0,008	0,32	0,126	0,62	0,232	0,92	0,321	1,22	0,389	1,52	0,436	1,82	0,466
0,03	0,012	0,33	0,129	0,63	0,236	0,93	0,324	1,23	0,391	1,53	0,437	1,83	0,466
0,04	0,016	0,34	0,133	0,64	0,239	0,94	0,326	1,24	0,393	1,54	0,438	1,84	0,467
0,05	0,020	0,35	0,137	0,65	0,242	0,95	0,329	1,25	0,394	1,55	0,439	1,85	0,468
0,06	0,024	0,36	0,141	0,66	0,245	0,96	0,331	1,26	0,396	1,56	0,441	1,86	0,469
0,07	0,028	0,37	0,144	0,67	0,249	0,97	0,334	1,27	0,398	1,57	0,442	1,87	0,469
0,08	0,032	0,38	0,148	0,68	0,252	0,98	0,336	1,28	0,400	1,58	0,443	1,88	0,470
0,09	0,036	0,39	0,152	0,69	0,255	0,99	0,339	1,29	0,401	1,59	0,444	1,89	0,471
0,10	0,040	0,40	0,155	0,70	0,258	1,00	0,341	1,30	0,403	1,60	0,445	1,90	0,471
0,11	0,044	0,41	0,159	0,71	0,261	1,01	0,344	1,31	0,405	1,61	0,446	1,91	0,472
0,12	0,048	0,42	0,163	0,72	0,264	1,02	0,346	1,32	0,407	1,62	0,447	1,92	0,473
0,13	0,052	0,43	0,166	0,73	0,267	1,03	0,348	1,33	0,408	1,63	0,448	1,93	0,473
0,14	0,056	0,44	0,170	0,74	0,270	1,04	0,351	1,34	0,410	1,64	0,449	1,94	0,474
0,15	0,060	0,45	0,174	0,75	0,273	1,05	0,353	1,35	0,411	1,65	0,451	1,95	0,474
0,16	0,064	0,46	0,177	0,76	0,276	1,06	0,355	1,36	0,413	1,66	0,452	1,96	0,475
0,17	0,067	0,47	0,181	0,77	0,279	1,07	0,358	1,37	0,415	1,67	0,453	1,97	0,476
0,18	0,071	0,48	0,184	0,78	0,282	1,08	0,360	1,38	0,416	1,68	0,454	1,98	0,476
0,19	0,075	0,49	0,188	0,79	0,285	1,09	0,362	1,39	0,418	1,69	0,454	1,99	0,477
0,20	0,079	0,50	0,191	0,80	0,288	1,10	0,364	1,40	0,419	1,70	0,455	2,00	0,477
0,21	0,083	0,51	0,195	0,81	0,291	1,11	0,367	1,41	0,421	1,71	0,456	2,10	0,482
0,22	0,087	0,52	0,198	0,82	0,294	1,12	0,369	1,42	0,422	1,72	0,457	2,20	0,486
0,23	0,091	0,53	0,202	0,83	0,297	1,13	0,371	1,43	0,424	1,73	0,458	2,30	0,489
0,24	0,095	0,54	0,205	0,84	0,300	1,14	0,373	1,44	0,425	1,74	0,459	2,40	0,492
0,25	0,099	0,55	0,209	0,85	0,302	1,15	0,375	1,45	0,426	1,75	0,460	2,50	0,494
0,26	0,103	0,56	0,212	0,86	0,305	1,16	0,377	1,46	0,428	1,76	0,461	2,60	0,495
0,27	0,106	0,57	0,216	0,87	0,308	1,17	0,379	1,47	0,429	1,77	0,462	2,70	0,497
0,28	0,110	0,58	0,219	0,88	0,311	1,18	0,381	1,48	0,431	1,78	0,462	2,80	0,497
0,29	0,114	0,59	0,222	0,89	0,313	1,19	0,383	1,49	0,432	1,79	0,463	2,90	0,498

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$; $\Phi(+\infty) = 0{,}5$.

Приложение 2

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α				Число степеней свободы k	Уровень значимости α			
	0,025	0,05	0,95	0,975		0,025	0,05	0,95	0,975
1	5,02	3,84	0,00	0,00	26	41,92	38,89	15,38	13,84
2	7,38	5,99	0,10	0,05	27	43,19	40,11	16,15	14,57
3	9,35	7,81	0,35	0,22	28	44,46	41,34	16,93	15,31
4	11,14	9,49	0,71	0,48	29	45,72	42,56	17,71	16,05
5	12,83	11,07	1,15	0,83	30	46,98	43,77	18,49	16,79
6	14,45	12,59	1,64	1,24	31	48,23	44,99	19,28	17,54
7	16,01	14,07	2,17	1,69	32	49,48	46,19	20,07	18,29
8	17,53	15,51	2,73	2,18	33	50,73	47,40	20,87	19,05
9	19,02	16,92	3,33	2,70	34	51,97	48,60	21,66	19,81
10	20,48	18,31	3,94	3,25	35	53,20	49,80	22,47	20,57
11	21,92	19,68	4,57	3,82	36	54,44	51,00	23,27	21,34
12	23,34	21,03	5,23	4,40	37	55,67	52,19	24,07	22,11
13	24,74	22,36	5,89	5,01	38	56,90	53,38	24,88	22,88
14	26,12	23,68	6,57	5,63	39	58,12	54,57	25,70	23,65
15	27,49	25,00	7,26	6,26	40	59,34	55,76	26,51	24,43
16	28,85	26,30	7,96	6,91	41	60,56	56,94	27,33	25,21
17	30,19	27,59	8,67	7,56	42	61,78	58,12	28,14	26,00
18	31,53	28,87	9,39	8,23	43	62,99	59,30	28,96	26,79
19	32,85	30,14	10,12	8,91	44	64,20	60,48	29,79	27,57
20	34,17	31,41	10,85	9,59	45	65,41	61,66	30,61	28,37
21	35,48	32,67	11,59	10,28	46	66,62	62,83	31,44	29,16
22	36,78	33,92	12,34	10,98	47	67,82	64,00	32,27	29,96
23	38,08	35,17	13,09	11,69	48	69,02	65,17	33,10	30,75
24	39,36	36,42	13,85	12,40	49	70,22	66,34	33,93	31,55
25	40,65	37,65	14,61	13,12	50	71,42	67,50	34,76	32,36

Приложение 3

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонний)			Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонний)		
	0,1	0,05	0,01		0,1	0,05	0,01
1	6,314	12,706	63,656	26	1,706	2,056	2,779
2	2,920	4,303	9,925	27	1,703	2,052	2,771
3	2,353	3,182	5,841	28	1,701	2,048	2,763
4	2,132	2,776	4,604	29	1,699	2,045	2,756
5	2,015	2,571	4,032	30	1,697	2,042	2,750
6	1,943	2,447	3,707	31	1,696	2,040	2,744
7	1,895	2,365	3,499	32	1,694	2,037	2,738
8	1,860	2,306	3,355	33	1,692	2,035	2,733
9	1,833	2,262	3,250	34	1,691	2,032	2,728
10	1,812	2,228	3,169	35	1,690	2,030	2,724
11	1,796	2,201	3,106	36	1,688	2,028	2,719
12	1,782	2,179	3,055	37	1,687	2,026	2,715
13	1,771	2,160	3,012	38	1,686	2,024	2,712
14	1,761	2,145	2,977	39	1,685	2,023	2,708
15	1,753	2,131	2,947	40	1,684	2,021	2,704
16	1,746	2,120	2,921	41	1,683	2,020	2,701
17	1,740	2,110	2,898	42	1,682	2,018	2,698
18	1,734	2,101	2,878	43	1,681	2,017	2,695
19	1,729	2,093	2,861	44	1,680	2,015	2,692
20	1,725	2,086	2,845	45	1,679	2,014	2,690
21	1,721	2,080	2,831	46	1,679	2,013	2,687
22	1,717	2,074	2,819	47	1,678	2,012	2,685
23	1,714	2,069	2,807	48	1,677	2,011	2,682
24	1,711	2,064	2,797	49	1,677	2,010	2,680
25	1,708	2,060	2,787	50	1,676	2,009	2,678

Раздел 10

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО (ФКП). ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Общий объем курса: [1]–гл. 1-- 5, 7; [2] -- гл. 7: пп.1, 2, 4 – 6; гл. 8: пп.1 – 4.

Литературные указания к задачам контрольной работы:

№1 – [3]: гл.1 пп. 8 – 12	[2]: нет материала
№2 – [3]: гл.2 пп. 36 – 46, 49, 50, 53	[2]: гл. 7 пп. 1, 2
№3 – [3]: гл.4 пп. 88 – 93	[2]: гл. 7 п. 5
№4 – [3]: гл.5 пп. 105 – 109	[2]: гл. 7 п. 6
№5 – [3]: гл.7 пп. 148 -- 158	[2]: гл. 8 п. 4
№6 – то же, что для задачи №5	

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения производной и дифференциала ФКП.
2. Какая функция называется аналитической? Выведите необходимые и достаточные условия для аналитичности функции
3. Дайте определение интеграла от ФКП и сформулируйте его основные свойства.
4. Сформулируйте основную теорему Коши.
5. Дайте определение ряда Лорана. Что является областью сходимости ряда Лорана?
6. Дайте классификацию изолировнных особых точек аналитической функции. Приведите примеры.
7. Дайте определение вычета в изолированной особой точке. Приведите формулы для вычисления вычетов в зависимости от типа особой точки.
8. Сформулируйте теорему Коши о вычетах. Приведите примеры ее применения.
9. Дайте определение преобразования Лапласа. Что называется изображением и оригиналом?
10. Докажите свойство линейности изображения.
11. Докажите теорему смещения.
12. Докажите теорему запаздывания.
13. Докажите теорему подобия.
14. Докажите теорему о дифференцировании оригинала.
15. Докажите теорему об интегрировании оригинала.

16. Докажите теорему о дифференцировании изображения.
17. Что называется сверткой двух оригиналов? Докажите теорему о свертке.
18. Изложите суть операционного метода решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Дано комплексное число **a**. Требуется :

1) записать число **a** в алгебраической и тригонометрической формах,
2) найти все корни уравнения $\mathbf{z^3 + a = 0}$.

1.1. **a** = $\frac{2\sqrt{2}}{(1-i)}$ **1.2.** **a** = $\frac{1}{(\sqrt{3}-i)}$ **1.3.** **a** = $\frac{-4}{(\sqrt{3}-i)}$ **1.4.** **a** = $\frac{4}{(\sqrt{3}-i)}$

1.5. **a** = $\frac{2\sqrt{2}}{(1+i)}$ **1.6.** **a** = $\frac{1}{(\sqrt{3}+i)}$ **1.7.** **a** = $\frac{1}{(1+i\sqrt{3})}$ **1.8.** **a** = $\frac{1}{(1-i\sqrt{3})}$

1.9. **a** = $\frac{-1}{(1+i\sqrt{3})}$ **1.10.** **a** = $\frac{-1}{(1-i\sqrt{3})}$ **1.11.** **a** = $\frac{-1}{(\sqrt{3}+i)}$ **1.12.** **a** = $\frac{1}{(i-\sqrt{3})}$

1.13. **a** = $\frac{-2\sqrt{2}}{(1-i)}$ **1.14.** **a** = $\frac{-2\sqrt{2}}{(1+i)}$ **1.15.** **a** = $\frac{-4}{(1+i\sqrt{3})}$ **1.16.** **a** = $\frac{4}{(1+i\sqrt{3})}$

1.17. **a** = $\frac{4}{(1-i\sqrt{3})}$ **1.18.** **a** = $\frac{-4}{(1-i\sqrt{3})}$ **1.19.** **a** = $\frac{4}{(\sqrt{3}+i)}$ **1.20.** **a** = $\frac{-4}{(\sqrt{3}+i)}$

Варианты для упражнений:

1.21. **a** = $\frac{2}{(1+i\sqrt{3})}$ **1.22.** **a** = $\frac{-2}{(1-i\sqrt{3})}$ **1.23.** **a** = $\frac{-8}{(\sqrt{3}-i)}$ **1.24.** **a** = $\frac{8}{(1+i)}$

2. Представить заданную функцию w=f(z), где z=x + i y, в виде w=u(x,y) + i v(x,y) ; проверить, является ли она аналитической, и найти значение ее производной в заданной точке z_0.

2.1. $\mathrm{w = ze^{3-3iz}}; \quad \mathrm{z_0 = i}$ **2.2.** $w = (iz)^3; \quad z_0 = -1+i$

2.3. $w = e^{-z^2}; \quad z_0 = i$ **2.4.** $w = \left(\frac{z}{i}\right)^3; \quad z_0 = i+1$

2.5. $\mathrm{w = 3ie^{-iz}}; \quad \mathrm{z_0 = i}$ **2.6.** $\mathrm{w = i(1-z^2) - 2z;\ z_0 = 1}$

2.7. $w=e^{z^2+3i}; \qquad z_0=0$ **2.8.** $w=e^{1-2z}; \qquad z_0=\frac{\pi i}{3}$

2.9. $w=\frac{1-z^2}{3i}-2z; \quad z_0=1$ **2.10.** $w=z^3+3z-i; \; z_0=-i$

2.11. $w=ze^{iz}; \quad z_0=0$ **2.12.** $w=e^{1-2iz}; \; z_0=\frac{\pi}{6}$

2.13. $w=z^3-3z; \quad z_0=-i$ **2.14.** $w=2z^2-iz; \; z_0=1-i$

2.15. $w=e^{iz^2}; \; z_0=\frac{\sqrt{\pi}}{2}i$ **2.16.** $w=\left(\frac{z}{1+i}\right)^2-3z; \; z_0=2-i$

2.17. $w=z^3+z^2+i; \quad z_0=\frac{2i}{3}$ **2.18.** $w=ze^z; \; z_0=-1+i\pi$

2.19. $w=(iz)^3+iz-3; \; z_0=-3i$ **2.20.** $w=\left(\frac{2z}{i}\right)^2+3z-8i; \; z_0=\frac{2i}{3}$

Варианты для упражнений:

2.21. $w=z^3+iz^2+2i; \quad z_0=2i$ **2.22.** $w=ze^{-1+2z}; \quad z_0=-\frac{i\pi}{6}$

3. Разложить функцию f(z) в ряд Лорана в окрестности точки z_0 и определить область сходимости этого ряда :

3.1. $f(z)=\frac{z-1}{z(z+1)}; \qquad z_0=-1$ **3.2.** $f(z)=\frac{1}{z(3z-5)}; \qquad z_0=\frac{5}{3}$

3.3. $f(z)=\sin\left(\frac{z}{1-z}\right); \qquad z_0=1$ **3.4.** $f(z)=\frac{z+3}{z^2-1}; \qquad z_0=-1$

3.5. $f(z)=\exp\left(\frac{1}{z}\right); \qquad z_0=0$ **3.6.** $f(z)=\frac{z}{z^2+1}; \qquad z_0=-i$

3.7. $f(z)=\frac{z}{(z^2+1)}; \qquad z_0=i$ **3.8.** $f(z)=\ln\left(\frac{z-1}{z-2}\right); \qquad z_0=1$

3.9. $f(z)=\cos\left(\frac{z}{z-1}\right); \qquad z_0=1$ **3.10.** $f(z)=z\cos\left(\frac{1}{z-2}\right); \qquad z_0=2$

3.11. $f(z)=\dfrac{2z}{(z^2+4)};\qquad z_0=2i$

3.12. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)};\qquad z_0=0$

3.13. $\mathrm{f}(\mathrm{z})=\exp\left(\dfrac{1}{1-\mathrm{z}}\right);\quad \mathrm{z}_0=1$

3.14. $f(z)=\dfrac{-z}{1+z^2};\qquad z_0=i$

3.15. $f(z)=\dfrac{2z}{z^2-4};\qquad z_0=-2$

3.16. $f(z)=z\exp\left(\dfrac{z}{z-5}\right);\qquad z_0=5$

3.17. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-3)^2};\qquad z_0=3$

3.18. $f(z)=z\exp\left(\dfrac{1}{z-2}\right);\qquad z_0=2$

3.19. $\mathrm{f}(\mathrm{z})=\dfrac{\mathrm{z}-2}{(\mathrm{z}-3)(\mathrm{z}+1)};\quad \mathrm{z}_0=3$

3.20. $f(z)=\dfrac{z-1}{z(z+1)};\qquad z_0=0$

Варианты для упражнений:

3.21. $\mathrm{f}(\mathrm{z})=\dfrac{2}{\mathrm{z}(2\mathrm{z}+1)};\mathrm{z}_0=-\dfrac{1}{2}$

3.22. $f(z)=\ln\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right);\qquad z_0=-1$

3.23. $\mathrm{f}(\mathrm{z})=\mathrm{z}\sin\left(\dfrac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}-2}\right);\quad \mathrm{z}_0=2$

3.24. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)z};\qquad z_0=-2i$

4. Вычислить действительные интегралы, применяя теорию вычетов :

4.1. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}$

4.2. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5+2\sqrt{6}\sin t}$

4.3. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t}$

4.4. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-3\sin t}$

4.5. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{9-4\sqrt{5}\sin t}$

4.6. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}$

4.7 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-2\sqrt{3}\sin t}$

4.8. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{6-4\sqrt{2}\sin t}$

4.9. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-4\sin t}$

4.10. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{8-3\sqrt{7}\sin t}$

4.11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$

4.12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-1}{(x^2+4)^2}\,dx$

4.13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}\,dx$

4.14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}\,dx$

4.15. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}$

4.16. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+9)}$

4.17. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+3)^2}$

4.18. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2}dx$

4.19. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}dx$

4.20. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+5)^2}dx$

Варианты для упражнений:

4.21. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dt}{4-\sqrt{7}\sin t}$

4.22. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dt}{3-2\sqrt{2}\sin t}$

4.23. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2}dx$

4.24. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$

5. Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

5.1. x’’+ 6x’+ 9x = 9e ^{3t} ; x(0)=0; x’(0)=0

5.2. x’’’+ x’’ = sin t ;x(0)=1; x’(0)=1; x’’(0)=0

5.3. x’’- x’ = t e ^{t} ; x(0)=0; x’(0)=0

5.4. x’’’- 2x’’+ x’ = 4 ; x(0)=1; x’(0)=2; x’’(0)= -2

5.5. x’’’’+ x’’’ = e ^{t} ; x(0)= -1; x’(0) = x’’(0) = x’’’(0) =0

5.6. x’’- 9x = e $^{-2t}$; x(0)=0 ; x’(0)=0

5.7. x’’+ x’ = t ^{2} + 2 t ; (0)=4; x’(0)= - 2

5.8. x’’+ 9x = cos 3 t ; x(0)=1; x’(0)=0

5.9. x’’’+ x = 1 ; x(0)= x’(0)= x’’(0)=0

5.10. x’’+ 3x’+ 2x = 0 ; x(0)=0; x’(0)=1

5.11. $x'' + x' + x = 7e^{2t}$; $x(0)=1;\ x'(0)=4$

5.12. $x'' - 4x = t - 1$; $x(0)=0;\ x'(0)=0$

5.13. $x'' + 2x' + x = \cos t$; $x(0)=0;\ x'(0)=0$

5.14. $x'' + 3x' + 2x = 1 + t + t^2$; $x(0)=0;\ x'(0)=1$

5.15. $x'' + 4x = 8 \sin 2t$; $x(0)=1;\ x'(0)=0$

5.16. $x'' + 9x' = \cos t$; $x(0)=0;\ x'(0)=0$

5.17. $x'' - 2x' - 3x = 2t$; $x(0)=1;\ x'(0)=1$

5.18. $x'' + 4x = 4e^{2t} + 4t^2$; $x(0)=1;\ x'(0)=2$

5.19. $x''' + 3x'' - 4x = 0$; $x(0)= x'(0)=0;\ x''(0)=2$

5.20. $x'' + 4x = \sin 2t$; $x(0)=0;\ x'(0)=1$

Варианты для упражнений:

5.21. $x'' + 2x' + 10x = 2e^{-t}\cos 3t$; $x(0)=5;\ x'(0)=1$

5.22. $x'' - 2x' = e^{t}(t^2 + t - 3)$; $x(0)=2;\ x'(0)=2$

6. Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

6.1. $\begin{cases} x' = x + 3y + 2, & x(0) = -1; \\ y' = x - y + 1, & y(0) = 2; \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1, & x(0) = 1; \\ y' = x + y, & y(0) = 2; \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} x' = x + 4y, & x(0) = 1; \\ y' = 2x - y + 9, & y(0) = 0; \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} x' = x + 2y + 1, & x(0) = 0; \\ y' = 4x - y, & y(0) = 1; \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} x' = 2x + 5y, & x(0) = 1; \\ y' = x - 2y + 2, & y(0) = 1; \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1, & x(0) = 0; \\ y' = x + 2y + 1, & y(0) = 2; \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} x' = 3x + y, & x(0) = 2; \\ y' = -5x - 3y + 2, & y(0) = 0; \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 1, & x(0) = 0; \\ y' = 2x + 3y, & y(0) = 2; \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} x' = -2x + 6y + 1, & x(0) = 0; \\ y' = 2x + 2, & y(0) = 1; \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1, & x(0) = -1; \\ y' = 4x - 2y, & y(0) = 0; \end{cases}$

6.11. $\begin{cases} x' = x + 2y, & x(0) = 0; \\ y' = 2x + y + 1, & y(0) = 5; \end{cases}$

6.12. $\begin{cases} x' = 2x - 2y, & x(0) = 3; \\ y' = -4x, & y(0) = 1; \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} x' = x + 3y + 3, & x(0) = 0; \\ y' = x - y + 1, & y(0) = 1; \end{cases}$

6.14. $\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2, & x(0) = 0; \\ y' = 3x + y + 1, & y(0) = 2; \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 2, & x(0) = 0; \\ y' = x + y + 1, & y(0) = 1; \end{cases}$

6.16. $\begin{cases} x' = 2y + 1, & x(0) = -1; \\ y' = 2x + 3, & y(0) = 0; \end{cases}$

6.17. $\begin{cases} x' = 2x + 8y + 1, & x(0) = 2; \\ y' = 3x + 4y, & y(0) = 1; \end{cases}$

6.18. $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2, & x(0) = 0; \\ y' = 4y + 1, & y(0) = 1; \end{cases}$

6.19. $\begin{cases} x' = x + y, & x(0) = 1; \\ y' = 4x + y + 1, & y(0) = 0; \end{cases}$

6.20. $\begin{cases} x' = x - 2y + 1, & x(0) = 0; \\ y' = -3x, & y(0) = 1; \end{cases}$

Варианты для упражнений:

6.21. $\begin{cases} x' = x + 4y + 1, & x(0) = 0; \\ y' = 2x + 3y, & y(0) = 1; \end{cases}$

6.22. $\begin{cases} x' = 2y, & x(0) = 2; \\ y' = 2x + 3y + 1, & y(0) = 1; \end{cases}$