Раздел 1

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Перед выполнением контрольной работы рекомендуется изучить теорию, необходимую для выполнения работы, и ответить на вопросы для самопроверки.

Вопросы для самопроверки

Дайте определения:

1. вектора и модуля вектора;
2. коллинеарности, компланарности, равенства векторов;
3. линейных операций над векторами; *)
4. базиса на прямой, на плоскости и в пространстве;
5. линейной зависимости и независимости векторов;
6. скалярного произведения векторов; *)
7. ортонормированного базиса;
8. векторного произведения векторов; *)
9. смешанного произведения трех векторов; *)
10. определителей 2-го и 3-го порядков; *)
11. полярной, цилиндрической и сферической систем координат.
12. Как выражаются введенные операции над векторами через их координаты в ортонормированном базисе?
13. Как преобразуются координаты вектора при замене базиса пространства (плоскости)?
14. Какому условию должны удовлетворять координаты трех векторов, чтобы их можно было принять за базис пространства?
15. Как можно найти точку пересечения а) двух линий на плоскости? б) трех поверхностей? в) линии и поверхности?
16. Опишите параметрический способ задания линий и поверхностей.

Напишите:

17. векторное уравнение плоскости, имеющей заданную нормаль и проходящей через заданную точку;

---

*) – укажите свойства определяемого понятия

18. векторное уравнение прямой, имеющей заданный направляющий вектор и проходящей через заданную точку;
19. уравнения прямой, проходящей через две точки, в пространстве и на плоскости;
20. уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки;
21. формулы вычисления углов а) между двумя прямыми (на плоскости и в пространстве), б) между двумя плоскостями, в) между прямой и плоскостью;
22. условия параллельности и перпендикулярности двух прямых (на плоскости и в пространстве), двух плоскостей, прямой и плоскости;
23. канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы; уравнения асимптот гиперболы;
24. канонические уравнения поверхностей 2-го порядка;
25. примеры уравнений линий в полярных координатах;

Дайте определения:

26. матрицы; линейных операций с матрицами; *)
27. определителя; *) минора, алгебраического дополнения;
28. решения системы линейных уравнений, совместности и несовместности системы.
29. Сформулируйте теорему Кронекера – Капелли.
30. Напишите формулы Крамера и дайте условие их применимости.
31. При каком условии однородная система линейных уранений с квадратной матрицей имеет ненулевое решение?
32. Опишите метод Гаусса решения систем линейных уравнений и отыскания ранга матрицы.

Дайте определения:

33. ранга матрицы;
34. свободных и базисных неизвестных в системе линейных уравнений;
35. общего решения однородной и неоднородной линейной системы;
36. произведения двух матриц; *)
37. обратной матрицы;
38. линейного (векторного) пространства L^n;
39. линейной зависимости и независимости векторов в L^n;

40. базиса и размерности линейного пространства L^n;
41. векторной формы записи системы линейных уравнений;
42. евклидова пространства E^n ;
43. модуля вектора и угла между векторами в евклидовом пространстве E^n ;
44. линейного преобразования пространства и его матрицы;
45. композиции линейных преобразований и ее матрицы;
46. собственных значений и собственных векторов линейного преобразования;
47. квадратичной формы и ее матрицы.
48. Как применяется теория квадратичных форм для приведения уравнений линий и поверхностей 2-го порядка к каноническому виду?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найти координаты вектора **x** в базисе **{a,b,c}**:

<u>Указание</u>: при решении системы применить правило Крамера.

1.1. **x**={ -2, 4, 7 }, **a** ={ 0, 1, 2 }, **b** ={ 1, 0, 1 }, **c**={ -1, 2, 4 }.

1.2. **x**={ 6, 12, -1 }, **a** ={ 1, 3, 0 }, **b** ={ 2, -1, 1 }, **c**={ 0, -1, 2 }.

1.3. **x**={ 1, -4, 4 }, **a** ={ 2, 1, -1 }, **b** ={ 0, 3, 2 }, **c**={ 1, -1, 1 }.

1.4. **x**={ -9, 5, 5 }, **a** ={ 4, 1, 1 }, **b** ={ 2, 0, -3 }, **c**={ -1, 2, 1 }.

1.5. **x**={ -5, -5, 5 }, **a** ={ -2, 0, 1 }, **b** ={ 1, 3, -1 }, **c**={ 0, 4, 1 }.

1.6. **x**={ 13, 2, 7 }, **a** ={ 5, 1, 0 }, **b** ={ 2, -1, 3 }, **c**={ 1, 0, -1 }.

1.7. **x**={-19, -1, 7 }, **a** ={ 0, 1, 1 }, **b** ={ -2, 0, 1 }, **c**={ 3, 1, 0 }.

1.8. **x**={ 3, -3, 4 }, **a** ={ 1, 0, 2 }, **b** ={ 0, 1, 1 }, **c**={ 2, -1, 4 }.

1.9. **x**={ 3, 3, -1 }, **a** ={ 3, 1, 0 }, **b** ={ -1, 2, 1 }, **c**={ -1, 0, 2 }.

1.10. **x**={ -1, 7, -4 }, **a** ={ -1, 2, 1 }, **b** ={ 2, 0, 3 }, **c**={ 1, 1, -1 }.

1.11. $\mathbf{x}=\{6,\ 5,\ -14\}$, $\mathbf{a}=\{1,\ 1,\ 4\}$, $\mathbf{b}=\{0,\ -3,\ 2\}$, $\mathbf{c}=\{2,\ 1,\ -1\}$.

1.12. $\mathbf{x}=\{6,\ -1,\ 7\}$, $\mathbf{a}=\{1,\ -2,\ 0\}$, $\mathbf{b}=\{-1,\ 1,\ 3\}$, $\mathbf{c}=\{1,\ 0,\ 4\}$.

1.13. $\mathbf{x}=\{5,\ 15,\ 0\}$, $\mathbf{a}=\{1,\ 0,\ 5\}$, $\mathbf{b}=\{-1,\ 3,\ 2\}$, $\mathbf{c}=\{0,\ -1,\ 1\}$.

1.14. $\mathbf{x}=\{2,\ -1,\ 11\}$, $\mathbf{a}=\{1,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{b}=\{0,\ 1,\ -2\}$, $\mathbf{c}=\{1,\ 0,\ 3\}$.

1.15. $\mathbf{x}=\{11,\ 5,\ -3\}$, $\mathbf{a}=\{1,\ 0,\ 2\}$, $\mathbf{b}=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{c}=\{2,\ 5,\ -3\}$.

1.16. $\mathbf{x}=\{8,\ 0,\ 5\}$, $\mathbf{a}=\{2,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{b}=\{1,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{c}=\{4,\ 1,\ 2\}$.

1.17. $\mathbf{x}=\{3,\ 1,\ 8\}$, $\mathbf{a}=\{0,\ 1,\ 3\}$, $\mathbf{b}=\{1,\ 2,\ -1\}$, $\mathbf{c}=\{2,\ 0,\ -1\}$.

1.18. $\mathbf{x}=\{8,\ 1,\ 12\}$, $\mathbf{a}=\{1,\ 2,\ -1\}$, $\mathbf{b}=\{3,\ 0,\ 2\}$, $\mathbf{c}=\{-1,\ 1,\ 1\}$.

1.19. $\mathbf{x}=\{-9,\ -8,\ -3\}$, $\mathbf{a}=\{1,\ 4,\ 1\}$, $\mathbf{b}=\{-3,\ 2,\ 0\}$, $\mathbf{c}=\{1,\ -1,\ 2\}$.

1.20. $\mathbf{x}=\{-5,\ 9,\ -13\}$, $\mathbf{a}=\{0,\ 1,\ -2\}$, $\mathbf{b}=\{3,\ -1,\ 1\}$, $\mathbf{c}=\{4,\ 1,\ 0\}$.

1.21. $\mathbf{x}=\{2,\ 7,\ 5\}$, $\mathbf{a}=\{1,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{b}=\{1,\ -2,\ 0\}$, $\mathbf{c}=\{0,\ 3,\ 1\}$.

1.22. $\mathbf{x}=\{15,\ -20,\ -1\}$, $\mathbf{a}=\{0,\ 2,\ 1\}$, $\mathbf{b}=\{0,\ 1,\ -1\}$, $\mathbf{c}=\{5,\ -3,\ 2\}$.

1.23 $\mathbf{x}=\{10,\ 1,\ 11\}$, $\mathbf{a}=\{3,\ 1,\ -1\}$, $\mathbf{b}=\{1,\ -1,\ 4\}$, $\mathbf{c}=\{2,\ 1,\ 5\}$

1.24 $\mathbf{x}=\{0,\ 6,\ -1\}$, $\mathbf{a}=\{-1,\ 2,\ 1\}$, $\mathbf{b}=\{2,\ 1,\ -1\}$, $\mathbf{c}=\{1,\ 2,\ 2\}$

2. Даны координаты вершин тетраэдра $\mathbf{A_1 A_2 A_3 A_4}$. Найти:

1) длину ребра $\mathbf{A_1 A_2}$;
2) угол между ребрами $\mathbf{A_1 A_2}$ и $\mathbf{A_1 A_4}$;
3) угол между ребром $\mathbf{A_1 A_4}$ и гранью $\mathbf{A_1 A_2 A_3}$;
4) площадь грани $\mathbf{A_1 A_2 A_3}$;
5) объем тетраэдра;
6) уравнения прямой $\mathbf{A_1A_2}$;
7) уравнение плоскости $\mathbf{A_1 A_2 A_3}$;
8) уравнения высоты, опущенной из вершины $\mathbf{A_4}$ на грань $\mathbf{A_1 A_2 A_3}$;
9) расстояние вершины $\mathbf{A_4}$ до грани $\mathbf{A_1 A_2 A_3}$;
10) расстояние вершины $\mathbf{A_4}$ до ребра $\mathbf{A_1 A_2}$.

Указание: все результаты представить точно в виде радикалов, а затем привести их приближенные значения.

	A_1	A_2	A_3	A_4
2.1.	(1, 3, 6)	(2, 2, 1)	(-1, 0, 1)	(-4, 6, -3)
2.2.	(-4, 2, 6)	(2, -3, 0)	(-10, 5, 8)	(-5, 2, -4)
2.3.	(7, 2, 4)	(7, -1, -2)	(3, 3, 1)	(-4, 2, 1)
2.4.	(2, 1, 4)	(-1, 5, -2)	(-7, -3, 2)	(-6, -3, 6)
2.5.	(-1, -5, 2)	(-6, 0, -3)	(3, 6, -3)	(-10, 6, 7)
2.6.	(0, -1, -1)	(-2, 3, 5)	(1, -5, -9)	(-1, -6, 3)
2.7.	(5, 2, 0)	(2, 5, 0)	(1, 2, 4)	(-1, 1, 1)
2.8.	(2, -1, -2)	(1, 2, 1)	(5, 0, -6)	(-10, 9, -7)
2.9.	(-2, 0, -4)	(-1, 7, 1)	(4, -8, - 4)	(1, - 4, 6)
2.10.	(14, 4, 5)	(-5, -3, 2)	(-2, -6, -3)	(-2, 2, -1)
2.11.	(1, 2, 0)	(3, 0, -3)	(5, 2, 6)	(8, 4, -9)
2.12.	(2, -1, 2)	(1, 2, -1)	(3, 2, 1)	(-4, 2, 5)
2.13.	(1, 1, 2)	(-1, 1, 3)	(2, -2, 4)	(-1, 0, -2)
2.14.	(2, 3, 1)	(4, 1, -2)	(6, 3, 7)	(7, 5, -3)
2.15.	(1, 1, -1)	(2, 3, 1)	(3, 2, 1)	(5, 9, -8)
2.16.	(1, 5, -7)	(-3, 6, 3)	(-2, 7, 3)	(-4, 8, -12)
2.17.	(-3, 4, -7)	(1, 5, -4)	(-5, -2, 0)	(2, 5, 4)
2.18.	(-1, 2, -3)	(4, -1, 0)	(2, 1, -2)	(3, 4, 5)
2.19.	(4, -1, 3)	(-2, 1, 0)	(0, -5, 1)	(3, 2, -6)
2.20.	(1, -1, 1)	(-2, 0, 3)	(2, 1, -1)	(2, -2, -4)
2.21.	(2, -4, -3)	(5, -6, 0)	(-1, 3, -3)	(-10, -8, 7)
2.22.	(1, -1, 2)	(2, 1, 2)	(1, 1, 4)	(6, -3, 8)
2.23.	(-1, 2, 4)	(-1, -2, -4)	(3, 0, -1)	(7, -3, 1)
2.24.	(0, -3, 1)	(-4, 1, 2)	(2, -1, 5)	(3, 1, -4)

3. Линия задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется:

1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ с шагом $\pi/8$;

2) найти уравнение данной линии в декартовой системе координат, начало которой совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью;

3) по уравнению в декартовых координатах определить, какая это линия.

3.1. **r**=2/(1+cos φ). **3.2.** **r**=4/(2-3cos φ). **3.3.** **r**=1/(2-2cos φ).
3.4. **r**=10/(2+cos φ). **3.5.** **r**=1/(2+2cos φ). **3.6.** **r**=1/(2+3cos φ).
3.7. **r**=5/(2-cos φ). **3.8.** **r**=8/(3-cos φ). **3.9.** **r**=2/(3-4cos φ).
3.10. **r**=5/(1-2cos φ). **3.11** **r**=4/(3+cos φ). **3.12.** **r**=6/4+3cos φ).
3.13. **r**=2/(2+5cos φ). **3.14.** **r**=3/(3+4cos φ). **3.15.** **r**=2/(3-2cos φ).
3.16. **r**=3/(5-2cos φ). **3.17.** **r**=3/(2+4cos φ). **3.18.** **r**=5/(2-3cos φ).
3.19. **r**=1/(4-cos φ) **3.20.** **r**=1/(3+cos φ). **3.21.** **r**=4/(1-cos φ).
3.22. **r**=2/(5-3cos φ). **3.23.** **r**=1/(2-3cos φ). **3.24.** **r**=6(1+cos φ) .

4. Решить систему уравнений:

1) методом Гаусса;

2) средствами матричного исчисления ($\mathbf{x=A}^{-1}\mathbf{B}$) ;

Указание: вычисления проводить с обычными дробями, не используя десятичных приближений.

4.1. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 7x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 17 \end{aligned}$

4.2. $\begin{aligned} 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 7x_1 + x_2 - 4x_3 &= -13 \\ 8x_1 + 3x_2 - x_3 &= -13 \end{aligned}$

4.3. $\begin{aligned} 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_3 &= 11 \end{aligned}$

4.4. $\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + 3x_3 &= 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 &= 30 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$

4.5. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 24 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 20 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$

4.6. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 7x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= 32 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 14 \end{aligned}$

4.7. $\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 14 \\ -2x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 18 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$

4.8. $\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 21 \\ 4x_1 + 8x_2 + x_3 &= 18 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 33 \end{aligned}$

4.9. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 16 \\ 7x_1 + x_2 - 7x_3 &= 14 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 27 \end{aligned}$

4.10. $\begin{aligned} 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -5 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= -13 \end{aligned}$

4.11. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \end{aligned}$

4.12. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 &= 6 \end{aligned}$

4.13. $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 18 \end{aligned}$

4.14. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$

4.15. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$

4.16. $\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= -4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

4.17. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$

4.18. $\begin{aligned} x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 &= -9 \end{aligned}$

4.19. $7x_1 - 5x_2 = 31$
$4x_1 + 11x_3 = -43$
$2x_1 \; 3x_2 + 4x_3 = -20$

4.20. $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31$
$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20$
$3x_1 - x_2 + x_3 = 9$

4.21. $5x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$
$x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 12$
$3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -4$

4.22. $3x_1 + 4x_3 = -5$
$x_1 + 2x_2 = 3$
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

4.23. $2x_1 + x_2 - x_3 = 5$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$
$3x_1 - x_2 + x_3 = 0$

4.24. $x_1 + 2x_2 + 2x_2 = 9$
$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$
$3x_1 + x_2 - x_3 = 3$

5. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы:

5.1. $3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$
$2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0$
$x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0$

5.2. $7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0$
$x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0$
$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0$

5.3. $x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0$
$5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0$
$3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0$

5.4. $6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0$
$-4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0$
$2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0$

5.5. $2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0$
$x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$
$4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0$

5.6. $5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0$
$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0$
$6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0$

5.7. $12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0$
$24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$

5.8. $x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$
$x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0$

5.9. $2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0$
$x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0$
$x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0$

5.10. $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$
$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0$
$2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$

5.11. $8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0$
$3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0$
$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0$

5.12. $x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0$
$2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0$
$3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0$

5.13. $7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0$
$x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0$
$5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0$

5.14. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0$
$2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$
$3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0$

5.15. $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0$
$2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$

5.16. $2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0$
$x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0$

5.17. $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0$
$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0$
$x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0$

5.18. $2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0$
$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0$

5.19. $2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0$
$x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0$
$x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0$

5.20. $3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$
$x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 5x_5 = 0$
$x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0$

5.21. $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0$
$7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0$

5.22 $x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0$
$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0$
$x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0$

5.23 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0$

5.24 $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$
$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0$
$2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$

Пример решения: $5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$
$3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0$
$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0$

Выпишем матрицу системы, нумеруя столбцы (нумеровать строки необязательно):

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & -2 & 4 & 7 \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{array}$$

и приведем ее к каноническому виду, применяя элементарные преобразования: умножение строки на число, перестановку строк, сложение строк, те же операции со столбцами. При этом следим за переставляемыми столбцами по их номерам.

1) Расположим в левом верхнем углу элемент, равный 1. (Если такого элемента в матрице нет, то следует поделить любой столбец на любой отличный от 0 его элемент). Для этого поменяем местами строки (1) и (2):

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 4 & 7 \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{array}$$

Теперь поменяем столбцы (1) и (2):

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 4 & 7 \\ (2) & (1) & (3) & (4) & (5) \end{array} \qquad [-2], \quad [-3]$$

В дальнейшем 1-я строка не подлежит изменению!

2) Сформируем нули во 2-й и 3-й строках первого столбца. Для этого умножим 1-ю строку на 1-й элемент 2-й строки и вычтем из 2-й строки. Так же поступим с 3-й строкой. (Множители указаны в [ ] .)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 4 & -5 & -8 \\ (2) & (1) & (3) & (4) & (5) \end{array} \qquad [-1]$$

В дальнейшем 1-й столбец не подлежит изменению!

3) Превратим в «1» 2-й элемент на главной диагонали, то есть стоящий во 2-й строке и 2-ом столбце. В нашем примере достаточно умножить на (-1) вторую строку. (В общем случае следует поделить 2-ю строку на этот элемент. Если же он равен 0, то предварительно переставляют строки не трогая 1-й (!), или столбцы не трогая 1-й (!).)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & 4 & -5 & -8 \\ (2) & (1) & (3) & (4) & (5) \end{array} \qquad [\,3\,]$$

В дальнейшем 2-я строка не подлежит изменению!

4) Превратим в «0» 3-й элемент 2-го столбца. Для этого умножим 2-ю строку на (+3) и сложим с 3-ей.

$$
\begin{array}{ccccc}
[\ 1 & 3 & -2\ ] & 3 & 5 \\
[\ 0 & 1 & -3\ ] & 3 & 6 \\
[\ 0 & 0 & -5\ ] & 4 & 10 \\
(2) & (1) & (3) & (4) & (5)
\end{array}
$$

Под главной диагональю стоят нули, а на самой главной диагонали их нет. Этот вид и является каноническим. (В других вариантах 3-я строка, или даже 2-я и 3-я вместе, могут состоять из одних нулей.) Минор, содержащий ненулевые элементы главной диагонали, является <u>базисным</u>, (здесь он указан скобками [ ]), а исходные номера входящих в него столбцов: (2) (1) (3) -- определяют номера <u>базисных</u> неизвестных; остальные неизвестные – <u>свободные</u>, и члены уравнений, содержащие их, переносят в правую часть.

5) Полученный вид матрицы и деление неизвестных на базисные и свободные позволяют переписать систему так:

$$
\begin{aligned}
x_2 + 3x_1 - 2x_3 &= -3x_4 - 5x_5 \\
x_1 - 3x_3 &= -3x_4 - 6x_5 \\
-5x_3 &= -4x_4 - 10x_5
\end{aligned}
$$

и выразить базисные неизвестные через свободные:

$$
\begin{aligned}
&x_3 = (4/5)\, x_4 + 2x_5 \\
&x_1 = 3x_3 - 3x_4 - 6x_5 = (-3/5)\, x_4 \\
&x_2 = -3x_1 + 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = (2/5)\, x_4 - x_5
\end{aligned}
$$

6) Полученное решение представим в виде линейной комбинации столбцов фундаментальной системы решений, образующей базис в линейном пространстве решений. Таких столбцов столько, сколько свободных неизвестных (здесь = 2).Проще всего последовательно придать одной из свободных неизвестных произвольное ненулевое значение, а остальные свободные неизвестные принять нулями.
В нашем примере удобно взять

1. $x_4^{(1)} = 5$, $x_5^{(1)} = 0$. Тогда $x_1^{(1)} = -3$, $x_2^{(1)} = 2$, $x_3^{(1)} = 4$
2. $x_4^{(2)} = 0$, $x_5^{(2)} = 1$. Тогда $x_1^{(2)} = 0$, $x_2^{(2)} = -1$, $x_3^{(2)} = 2$

Теперь общее решение можно записать так: $\mathbf{x} = C_1\, \mathbf{x}^{(1)} + C_2\, \mathbf{x}^{(2)}$. (Здесь C_1, C_2 – произвольные постоянные), или развернуто:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Полезно проверить, что столбцы $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ являются частными решениями исходной системы, то есть сделать прямую подстановку.

<u>Сформулируем ответ на вопрос задачи</u>: размерность пространства решений равна числу свободных неизвестных, (т.е. 2), а базисом в этом пространстве могут служить два найденных частных решения: $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$.

6. Дано уравнение кривой 2-го порядка. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы соответствующей квадратичной формы и использовать их для приведения уравнения кривой к каноническому виду. Указать тип кривой.

6.1. $-x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$ **6.2.** $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$
6.3. $2xy + 2x - 2y = 0$ **6.4.** $-2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3 = 0$
6.5. $-3x^2 - 3y^2 + 4xy - 6x + 4y + 2 = 0$ **6.6.** $-2xy - 2x - 2y + 1 = 0$
6.7. $-x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 2 = 0$ **6.8.** $-4x^2 - 4y^2 + 2xy + 10x - 10y + 1 = 0$
6.9. $2xy + 2x - 2y - 1 = 0$ **6.10.** $x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y + 1 = 0$
6.11. $x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 1 = 0$ **6.12.** $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 7 = 0$
6.13. $2xy + 2x + 2y - 3 = 0$ **6.14.** $4x^2 + 4y^2 + 2xy + 12x + 12y + 1 = 0$
6.15. $3x^2 + 3y^2 + 4xy + 8x + 12y + 1 = 0$ **6.16.** $x^2 + y^2 - 8xy - 20x + 20y + 1 = 0$
6.17. $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 1 = 0$ **6.18.** $4xy + 4x + 4y + 1 = 0$
6.19. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6 - 4y - 7 = 0$ **6.20.** $-2xy - 2x + 2y + 3 = 0$
6.21. $2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x + 8y + 1 = 0$ **6.22** $x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0$
6.23 $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 4x + 4y + 1 = 0$ **6.24** $-4xy + 8x + 8y + 1 = 0$

Рассмотрим пример $5x^2 + 5y^2 - 2xy + 10x - 2y + 1 = 0$

1) Выпишем симметричную матрицу квадратичной формы

$5x^2 + 5y^2 - 2xy$: $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

2) Находим собственные значения:

$$\mathrm{Det}\,(A-\lambda\ E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-l)^2 - 1 = 0$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0$, очевидно, таковы: $\lambda_1 = 4$,
$\lambda_2 = 6$.

3) Найдем собственные векторы матрицы A, рассматривая однородную систему:

$$(5-\lambda)u_1 - u_2 = 0$$
$$-u_1 + (5-\lambda)u_2 = 0$$

При $\lambda_1 = 4$ имеем $u_1 = u_2$ и в качестве первого собственного вектора примем

$$\mathbf{u}^{(1)} = (1\ ;\ 1)^T.$$

(Знак $^{(T)}$ означает транспонирование .) Нормируем его:

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{u}^{(1)} / |u^{(1)}| = (1\ ;\ 1)^T / \sqrt{2}.$$

(Напомним: если $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$, то $|\,\mathbf{u}\,| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.)

При $\lambda_2 = 6$ имеем $u_1 = -u_2$. В качестве второго собственного вектора примем $\mathbf{u}^{(2)} = (1\ ;\ -1)^T$ и нормируем его:

$$\mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{u}^{(2)} / |\,\mathbf{u}^{(2)}| = (1\ ;\ -1)^T / \sqrt{2}.$$

4) Сделаем замену координат $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, где матрица перехода S имеет столбцами нормированные собственные векторы $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$, то есть $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} x &= (x_1 + y_1)/\sqrt{2} \\ y &= (x_1 - y_1)/\sqrt{2} \end{aligned}.$$

В новых координатах квадратичная форма примет вид

$$5x^2 + 5y^2 - 2xy = l_1 x_1^2 + l_2 y_1^2 = 4x_1^2 + 6y_1^2.$$

Это следует из общей теории, но полезно использовать равенство

$$(A\mathbf{x},\mathbf{x}) = (AS\mathbf{x}_1, S\mathbf{x}_1) = (S^T AS\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = (A_1\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1),\ \text{откуда}$$

$$A_1 = S^T AS = \mathrm{diag}(l_1, l_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

и проверить результат непосредственным матричным умножением. В новых координатах уравнение кривой примет вид:

$$4x_1^2 + 6y_1^2 + 5\sqrt{2}(x_1 + y_1) - \sqrt{2}(x_1 - y_1) + 1 = 0.$$

7) Параллельным переносом осей координат устраним линейные члены. Соберем члены, содержащие x_1 и выделим полный квадрат:

$$4x_1^2 + 4\sqrt{2}\,x_1 = 4(x_1 + \sqrt{2}/2)^2 - 2.$$

Аналогично поступим с членами, содержащими y_1:

$$6y_1^2 + 6\sqrt{2}\,y_1 = 6(y_1 + \sqrt{2}/2)^2 - 3.$$

Делаем замену переменных:

$$x_2 = x_1 + \sqrt{2}/2; \qquad y_2 = y_1 + \sqrt{2}/2,$$

в результате которой уравнение кривой принимает вид $4x_2^2 + 6y_2^2 - 4 = 0$, и после деления на свободный член получаем

$$x_2^2 + \frac{y_2^2}{(\sqrt{2}/3)^2} = 1$$ -- каноническое уравнение эллипса.

Раздел 2

ПРЕДЕЛЫ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ.

Перед выполнением контрольной работы рекомендуется изучить теорию, необходимую для выполнения работы, и ответить на вопросы для самопроверки.

I. Функция

1. Дайте определение функции. Что называют областью определения и множеством значений функции.
2. Каковы способы задания функции? Примеры.
3. Какая функция называется сложной?
4. Дайте определения основных элементарных функций.
5. Дайте определения четной и нечетной функции. Примеры.
6. Какая функция называется периодической?

II. Предел и непрерывность функции

1. Дайте определение предела последовательности.
2. Дайте определение предела функции при $x \to a,\ x \to \infty,\ x \to -\infty$.
3. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to a$. Каковы ее свойства?
4. Какая функция называется бесконечно большой и каковы ее основные свойства?
5. Как связано понятие предела функции в точке с понятиями ее пределов слева и справа в этой точке?
6. Докажите основные теоремы о пределах.
7. Докажите 1-ый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.
8. Сформулируйте определение числа e.
9. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке и на отрезке. Какие точки называют точками разрыва функции?
10. Сформулируйте основные свойства функций, непрерывных на отрезке, и дайте геометрическое истолкование этим свойствам.
11. Сформулируйте определение порядка одной бесконечно малой относительно другой бесконечно малой.
12. Докажите, что при $x \to 0$ бесконечно малые sinx, tgx, arcsinx, arctgx, e^x-1, ln(1+x) эквивалентны x.

III. Производная и дифференциал функции одной переменной

1. Дайте определение производной функции в точке. Каков ее геометрический и механический смысл?

2. Как связаны между собой понятия непрерывности в точке и дифференцируемости в точке? Приведите примеры.
3. Выведите формулы производной суммы, произведения, частного.
4. Теорема о дифференцируемости сложной функции.
5. Докажите формулы из таблицы производных.
6. Дифференцирование степенно-показательных функций. Сформулируйте правило логарифмического дифференцирования.
7. Докажите теорему о дифференцировании обратной функции.
8. Сформулируйте определение дифференциала функции. Каков его геометрический смысл?
9. В чем состоит свойство инвариантности дифференциала функции?
10. Напишите формулу приложения дифференциала к приближенным вычислениям.
11. Сформулируйте определение производной и дифференциала высших порядков.
12. Как находится первая и вторая производная от функций, заданных параметрически?

IV. Функции нескольких переменных

1. Что называют функцией двух переменных, ее областью определения? Дайте геометрическое толкование этих понятий.
2. Дайте определение функции 3-х переменных и ее области определения.
3. Что называют пределом функции двух переменных в точке? Дайте определение функции, непрерывной в точке и в области.
4. Как определяются частные производные? Сформулируйте правило нахождения частных производных. Каков геометрический смысл частных производных функции двух переменных?
5. Какая функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $M_o(x_o, y_o)$? Что называют полным дифференциалом функции в точке? В чем состоит правило применения полного дифференциала для вычисления приближенных значений функции?
6. Выведите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.
7. Выведите формулы для нахождения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции $z = F(U, V)$, где $U = \varphi(x, y), V = g(x, y)$.

8. Напишите формулу вычисления полной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ сложной функции $z = f(U, V)$, $U = \varphi(x)$, $V = g(x)$.
9. Выведите формулу дифференцирования неявной функции $y = y(x)$, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.
10. Дайте определение частных производных высших порядков. Сформулируйте теорему о равенстве смешанных частных производных функции двух переменных.
11. Что называют производной функции $U = U(x, y, z)$ в данной точке M_0 по направлению вектора? Выведите формулу ее вычисления.
12. Что называют градиентом скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в данной точке? Как выражается производная по направлению через градиент и единичный вектор?
13. Дайте определение локального максимума (минимума) функции двух переменных. Выведите необходимое условие и сформулируйте достаточное условие экстремума функции двух переменных.
14. Сформулируйте правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в замкнутой области.
15. Что называют условным экстремумом функции $z = f(x, y)$? Как найти условный экстремум, если переменные связаны одним условием?
16. Напишите уравнение касательной и нормальной плоскости к кривой.
17. Как вычислить кривизну кривой в данной точке?

Задания для контрольной работы .

Задание 1. Найти предел функции, не пользуясь правилом Лопиталя.

1.1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{9x}$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{4x+2}{4x-1}\right)^{5x}$ г) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(1+3x)}{e^{-4x}-1}$

1.2. а) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{3x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\mathrm{tg} 3x}$

1.3. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+7}{3x+5}\right)^{x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\arcsin^2 3x}$

1.4. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+10}-4}{x-2}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-2}{2x+6}\right)^{x+1}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{\sin 6x}$

1.5. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-9}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{2x+1}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 2x}{x\cdot\sin 7x}$

1.6. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt{2x+11}-5}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{1-x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x\cdot\sin 2x}{\left(e^{4x}-1\right)x}$

1.7. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$ б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{\sqrt{3x+7}-2}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+4}\right)^{5x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\arcsin 2x}$

1.8. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x+3}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-3x}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+2}\right)^{2x+1}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{arctg}^2 2x}$

1.9. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{5x^2-4x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1+4x}-3}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-2}{2x+3}\right)^{4x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{2\arcsin^2 x}$

1.10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-8}{x^3-8}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+3}\right)^{2x^2}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\arcsin 3x}$

1.11. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$ б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x^2-7x}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{3x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}7x}{\ln(1+3x)}$

1.12. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+1}\right)^{2x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\arcsin^2 5x}{\mathrm{arctg}^2 4x}$

1.13. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+8}{x^2+x-2}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$

1.14. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-10x+25}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

в) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{2/(x-3)}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\arcsin 3x}$

1.15. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)^2}{x^2-3x-10}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+3x}-\sqrt{1-2x}}{x^2+x}$

в) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{x/(x-1)}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\mathrm{tg}4x}$

1.16. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-2x-3}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+3\cos x)^{1/\cos x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\mathrm{ctg}2x}{\mathrm{tg}3x}$

1.17. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-2x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5\mathrm{tg}x)^{3\mathrm{ctg}x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{\sin 4x}$

1.18. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$

в) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{x^2/(x-2)}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}2x}{e^{4x}-1}$

1.19. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{(x+2)^2}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$

в) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{x^2/(x-2)}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 5x}{\sin^2 4x}$

1.20. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{4x^2+x-5}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+7x)}{\arcsin 11x}$

1.21 а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-4}{2x^2-x-6}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$ г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\operatorname{arctg}3x}$

1.22 а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$ б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+5}-2}$

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\arcsin 2x}$

1.23 а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+3x-5}{x^2-x}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{x+7}}{x^2-2x}$

в) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{6}\right)}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$

1.24 а) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-7x-4}{x^2-16}$ б) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{x^2-8x}$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\left(2e^{x-2}-1\right)^{\frac{3x+2}{x-2}}$ г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$,0

Задание 2. Найти производные указанных функций.

2.1. а) $y=\frac{\sin(2x^3+4)}{\sqrt{x^3+2}}$ б) $y=e^{3x}\sin^2 4x+\operatorname{tg}5$ в) $y=(\cos x^2)^{\operatorname{arctg}2x}$

2.2. а) $y=x^2\sqrt{\cos\frac{x}{2}}$ б) $y=\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}+2^{\operatorname{tg}x}$ в) $y=(\arccos 4x)^{\sin x^3}$

2.3. а) $y=\frac{\ln(x^2+4)}{\sqrt{1-4x^2}}$ б) $y=e^{8x}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)+2$ в) $y=(\cos 5x)^{\arcsin 4x}$

2.4. а) $y=x\sqrt[3]{2^{\operatorname{ctg}4x}-\sin^4 3x}$ б) $y=\frac{3+\operatorname{tg}2x}{1+\cos^2 4x}$ в) $(\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{arctg}2x}$

2.5. а) $y=\sin^3(x^2+4)\operatorname{tg}5x$ б) $y=\frac{3x^4+e^{7x}}{2x+7}+\sqrt{3}$ в) $y=(\arccos 9x)^{\ln 2x}$

2.6. а) $y=\sin^2 6x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ б) $y=\frac{\operatorname{ctg}x^4+3}{\cos^2 4x}+e^{2x}$ в) $y=(\arcsin 5x)^{\sqrt[3]{x^2+1}}$

2.7. а) $y = x^2 \cdot tg^2(e^{4x} + 2)$ б) $y = \frac{\sin 2x + x^2}{\cos 3x} + 2^{\ln x^2}$ в) $y = (4x^2 + 2)^{arctg 3x}$

2.8. а) $y = x^8 \cos^4(2x + x^5)$ б) $y = \frac{tg2x}{1 + \sin^2 3x} + e^{\frac{1}{x}}$ в) $y = \left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right)^{ctg 2x}$

2.9. а) $y = x^2 \cdot 2^{tg^3 4x}$ б) $y = \frac{arctg\sqrt{x}}{\sin 4x} + e^{x^9 + 7}$ в) $y = (\cos x^6)^{\ln \sqrt[5]{x^4}}$

2.10. а) $y = x^7 \ln\left(1 + \sqrt[5]{x^3 + 4}\right)$ б) $y = \frac{\sin x^4}{(2x + 3)^4} + 2^{\sin(\cos x)}$ в) $y = (2 + x^4)^{ctg 5x}$

2.11. а) $y = e^{2x} \sin^3 4x$ б) $y = \frac{\ln(\cos 3x)}{(x^2 + 1)^4} + 3^{arctg 4x}$ в) $y = \left(arctg\sqrt{x}\right)^{x^2}$

2.12. а) $y = \sin^2 4x \cdot \ln(x^2 + 5x)$ б) $y = \frac{3 + \cos^2 2x}{tg4x} + e^{5x} + 1$ в) $y = (\arcsin 5x)^{\sqrt[3]{x}}$

2.13. а) $y = \cos(2x + 3)\, arctg5x$ б) $y = \frac{(5 + x^3)^4}{\sin x^2} + tg^2 3x$ в) $y = (ctg8x)^{x^5}$

2.14. а) $y = x^8 \cdot \sqrt[4]{\frac{3 - x}{3 + x}}$ б) $y = \frac{\sin 7x}{2\cos^2 x} + e^{tg 3x}$ в) $y = (arctg4x)^{1/x^2}$

2.15 а) $y = \cos^2 2x \cdot \sin^3 4x$ б) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{(3x + 2)^5} + e^{ctg 2x}$ в) $y = (tg3x)^{\ln(x^3 + x)}$

2.16. а) $y = x^7 (e^{\sin 4x} - 1)^5$ б) $y = \frac{\sqrt[3]{2x + 4}}{\cos^2 2x} + 3^{\ln(x^2 + 1)}$ в) $y = (ctg4x)^{\arcsin 2x}$

2.17. а) $y = \sqrt[4]{x}\left(3^{\cos x} - 2\sin^8 5x\right)^7$ б) $y = \frac{4x - 3}{\sqrt{x^3 + 2x + 1}} + e^{2x}$ в) $y = (x + tg4x)^{arctg 2x}$

2.18. а) $y = x\left(5^{tg^2 2x} + \sin 4x\right)^4$ б) $y = \frac{4x + 7}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}} + e^{7x}$ в) $y = (arctg5x)^{\sqrt{x^2 + 1}}$

2.19. а) $y = 3x(x^2 - 4x + 1)^6$ б) $y = \frac{5 + \sin 4x}{2^{ctg 3x}} + e^{5x}$ в) $y = (x^2 + 2)^{\arccos 5x}$

2.20. а) $y = x^2(7^{\sin 2x} + \cos^3 2x)$ б) $y = \frac{2x^3 - 2}{tg^2 5x} + e^{\sqrt[3]{x^5 + 1}}$ в) $y = (x + \ln(2x))^{1/x}$

2.21 а) $y = x^3 \cdot \left(\sqrt{x} + 4x - 3\right)^2$ б) $y = \frac{2\sin 2x + 1}{3^{\cos x}} + e^{3x}$ в) $y = (x^2 + 3)^{\arcsin y}$

2.22 а) $y = \sqrt{2x + 1} \cdot \sqrt[3]{x = 2}$ б) $y = \frac{3x + 2}{2\sin^2 x + 1} + 2^x$ в) $y = (\arcsin x)^x$

2.23 а) $y = \sqrt[3]{3x^2 + 1} \cdot tg^2 2x$ б) $y = \frac{\cos^2 x + 1}{\sin^2 x - 1} + 3$ в) $y = (tgx)^x$

2.24 а) $y = x^3 \cdot 3^{x^3}$ б) $y = \frac{2 + 3\sin^2 2x}{\cos 3x}$ в) $y = \left(\sqrt{x} + 2\right)^{x + 1}$

Задание 3. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

3.1. а) $y = \ln\cos 2x$ б) $\begin{cases} x = t - \ln t \\ y = 3t^2 - 2t^3 \end{cases}$

3.2. а) $y = x^2 e^{3x}$ б) $\begin{cases} x = t^2 + \ln t \\ y = 2t^3 + 3t \end{cases}$

3.3. а) $y = \arcsin x$ б) $\begin{cases} x = \mathrm{arctg} 3t \\ y = \ln(1 + 9t^2) \end{cases}$

3.4. а) $y = e^{\mathrm{tg} 2x}$ б) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$

3.5. а) $y = \mathrm{arctg} x$ б) $\begin{cases} x = a \cdot \mathrm{tg} t \\ y = \dfrac{b}{\cos t} \end{cases}$

3.6. а) $y = \ln\sin 5x$ б) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

3.7. а) $y = x^2 \ln x$ б) $\begin{cases} x = \mathrm{ctg} t \\ y = \dfrac{b}{\cos^2 t} \end{cases}$

3.8. а) $y = \dfrac{3}{x^2 - 1}$ б) $\begin{cases} x = a \cdot \cos^2 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$

3.9. а) $y = \sqrt{1 + x^2}$ б) $\begin{cases} x = a \cdot (t - \sin t) \\ y = a \cdot (1 - \cos t) \end{cases}$

3.10. а) $y = x \cdot e^{-x^2}$ б) $\begin{cases} x = a \cdot (\sin t - t\cos t) \\ y = a \cdot (\cos t + t\sin t) \end{cases}$

3.11. а) $y = 2^{-x}$ б) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$

3.12. а) $y = (x^3 - 1)^2$ б) $\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

3.13. а) $y = (x^2 + 5)^4$ б) $\begin{cases} x = a \cdot \cos^2 t \\ y = a \cdot \sin^3 t \end{cases}$

3.14. а) $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ б) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 + t \end{cases}$

3.15. а) $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x$ б) $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(t + 1) \end{cases}$

3.16. а) $y=(1+x^2)\operatorname{arctg}x$ б) $\begin{cases} x=t^9+3t+1 \\ y=3t^5+5t^3+1 \end{cases}$

3.17. а) $y=\sqrt{4-x^2}$ б) $\begin{cases} x=\dfrac{1-t}{1+t} \\ y=\dfrac{2t}{1+t} \end{cases}$

3.18. а) $y=\sin^2 5x$ б) $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$

3.19. а) $y=\cos^3 6x$ б) $\begin{cases} x=a\cdot\cos t \\ y=b\cdot\sin t \end{cases}$

3.20. а) $y=e^{\sqrt{x}}$ б) $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\ln(1-t^2) \end{cases}$

3.21 а) $x\cdot\cos x^2$ б) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^2} \\ y=\dfrac{1}{t^2+1} \end{cases}$

3.22 а) $y=(2x^3+1)\cos x$ б) $\begin{cases} x=\mathrm{frctg}t \\ y=\dfrac{t^2}{2} \end{cases}$

3.23 а) $y=(x^2+3x)\cdot e^{3x+2}$ б) $\begin{cases} x=e^t \\ y=\arcsin t \end{cases}$

3.24 а) $y=(5x-1)\cdot\ln x$ б) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin^4\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases}$

Задание 4. Дана функция $z=f(x,y)$. Показать, что она является решением дифференциального уравнения.

4.1 $z=\dfrac{y}{(x^2-y^2)^5}$; $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$

4.2 $z=\dfrac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)$; $x^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$

4.3 $z=\ln(x^2+y^2+2x+1)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

4.4 $z=e^{xy}$; $x^2\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2xyz=0$

4.5 $z=\ln(x+e^{-y})$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$

4.6	$z = \frac{x}{y};$	$x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
4.7	$z = x^y;$	$y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y \cdot \ln x) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$
4.8	$z = x \cdot e^{\frac{y}{x}};$	$x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$
4.9	$z = \sin(x + ay);$	$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
4.10	$z = \cos y + (y - x)\sin y;$	$(x - y) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$
4.11	$z = y \cdot e^{x^2 - y^2};$	$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$
4.12	$z = \ln(x^2 + y^2);$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$
4.13	$z = e^{\frac{x}{y}};$	$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$
4.14	$z = x^3 \cdot \cos y;$	$z \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$
4.15	$z = \sin x + y \cdot \cos x;$	$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} + y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
4.16	$z = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{y^2}{4a^2 x}};$	$\frac{\partial z}{\partial x} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
4.17	$z = \frac{y^2}{3x} + \sin(xy);$	$x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
4.18	$z = \sin(x - ay) + \cos(x + ay);$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
4.19	$z = \sin(x + \cos y);$	$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
4.20	$z = \sin(x^2 + y^2);$	$\frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$
4.21	$z = \cos(x^2 + y^2);$	$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
4.22	$z = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{x - y};$	$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x - y}{x^2 + y^2}$
4.23	$z = \sqrt[3]{x^2 + y^2};$	$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
4.24	$z = y \cdot \sin(x^2 - y^2)$	$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$

Задание 5. Найти производные указанного порядка функции, заданной неявно $F(x, y, z) = 0$.

5.1	$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0;$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
5.2	$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0;$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
5.3	$\dfrac{x}{z} = 1 + \ln\left(\dfrac{z}{y}\right);$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
5.4	$z = x + \mathrm{arctg}\dfrac{y}{z - x};$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
5.5	$ax + by - cz = k \cdot \cos(ax + by - cz);$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
5.6	$y^3 \cdot x + y + z = e^z;$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
5.7	$z^3 - 3xyz = a^3;$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
5.8	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1;$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
5.9	$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a};$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
5.10	$xy + xz + yz = 1;$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
5.11	$x^2 y + y^2 z + z^2 x = z;$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
5.12	$z^3 - x^2 z^2 + y^2 = 0;$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
5.13	$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 + z^2);$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
5.14	$x \cdot \sin y + y \cdot \sin x + z \cdot \sin x = a;$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
5.15	$x \cdot e^y + y \cdot e^x + z^2 \cdot e^x = a;$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
5.16	$xz = \cos(yz);$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
5.17	$\sin\left(\dfrac{z}{x}\right) + x + y + z = 1;$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
5.18	$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0;$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

5.19	$x^2 + y^2 + z^2 = y \cdot e^{\frac{z}{y}}$;	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
5.20	$e^{x+z} + y + z = 0$;	$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
5.21	$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
5.22	$3x^4 + y^4 + z^4 - xyz = 0$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
5.23	$(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$	$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
5.24	$4x^2 + 3y^2 = 3z^2$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Зимина О.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебное пособие для студентов вузов. – М.: Издательство МЭИ, 2000.

2. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – 5-е издание. – М.: Высшая школа, 2002.

Для заметок